

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM

FIZIKA KAR

MÉRNÖKI FIZIKA SZAK

Szakdolgozat



Témavezető:

dr. JÁRAI-SZABÓ Ferenc, egyetemi
docens

Szerző:

BÁCS Tamás

2023. június 27.

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM

FIZIKA KAR

MÉRNÖKI FIZIKA SZAK

Szakedolgozat
Véletlen bolyongást végző kétmódusú
oszcillátorok



Témavezető:

dr. JÁRAI-SZABÓ Ferenc, egyetemi
docens

Szerző:

BÁCS Tamás

2023. június 27.

Tartalomjegyzék

Bevezető	4
1. Szinkronizáció	6
1.1. Történelmi áttekintés	6
1.2. Szinkronizáció az élővilágban	7
1.3. Kuramoto-modell	8
1.4. Kétmódusú sztochasztikus oszcillátorok	11
2. Kollektív mozgások	15
2.1. Baktérium kolóniák	16
2.2. Madárrajok	16
3. Swarmalator-ok	18
3.1. Általánosított Kuramoto-modell	19
4. Véletlen bolyongást végző, lokálisan csatolt kétmódusú oszcillátorok	22
4.1. A modell felépítése	22
4.1.1. Lokális csatolás	22
4.1.2. Véletlen bolyongás	23
4.2. Szimuláció	24
4.2.1. Mérések	24
4.3. Kísérlet	30
Következtetés	35
Irodalomjegyzék	36

Bevezető

Az önszerveződés különböző formái gyakran nagy méretű, látványos jelenségekként fordulnak elő a természetben és főképp az állatvilágban. Ennek köszönhető, hogy a kutatók hosszú ideje tanulmányozzák az önszerveződő rendszerek által mutatott jelenségeket, próbálják megérteni a viselkedésük miértjét, és matematikai alakban felírni az őket hajtó összefüggéseket [1].

Egy kézenfekvő példa az önszerveződésre a szinkronizáció. A szinkronizáció során bizonyos, periodikusan változó tulajdonságokkal jellemzett, egységek kölcsönhatnak és ez a kölcsönhatás révén befolyásolják egymás fázisát. Az élővilágban számos példa van szinkronizációra: azonos fázisban villogó szentjánosbogarak [2], összehangoltan brekegő békák [3] vagy ciripelő tücskök [4], de ugyanitt említhetjük a vastapsoló embereket [5] vagy az együttélő nők menstruációs ciklusának [6] a szinkronizációját.

Egy másik fontos és a hétköznapi életben gyakran megfigyelhető fajtája az önszerveződésnek a kollektív mozgások kialakulása. Kollektív mozgás alatt azt értjük, amikor egy, nagyjából azonos abszolút sebességgel mozgó egységekből álló, rendszer valamilyen kölcsönhatás révén teljesen más mintázatban kezd mozogni, mint ami a rendszer egy elszigetelt egységétől várható lenne. Kollektív mozgások esetén a rendszert alkotó egységek mozgását szinte teljes mértékben a környezetük határozza meg. Ezt a mozgást gyakran rajzásnak nevezik. A rajzás megfigyelhető madarak együtt felröppenő csoportjainál [7][8], de hasonlóan rovarok [9] és halak között is [10].

Beszélhetünk az önszerveződő rendszerek egy olyan specifikus esetéről, amikor a rendszert alkotó egységek egyidőben oszcillálnak és mozognak a térben. Az ilyen rendszerekben a fázis és a pozíció befolyásolhatják a kollektív mozgást és a szinkronizációt, amelyek egyszerre is kialakulhatnak [11].

Dolgozatom megírása során is egy ilyen rendszert vizsgáltunk. Arra voltunk kíváncsiak, hogy a már jól ismert globálisan csatolt kétmódusú sztochasztikus oszcillátorok között kialakuló szinkronizációhoz hasonló viselkedés előidézhető-e, ha a csatolás lokális, és az oszcillátorok véletlen bolyongást végeznek.

Az első három fejezetben az elméleti alapokat ismertetjük, amelyekre a dolgozat épül. Külön fejezetként tárgyaljuk a **szinkronizációt**, a **kollektív mozgást** és az előző kettőt összekapcsoló **swarmalator**-okat.

A szinkronizációról szóló fejezetben írunk a jelenség felfedezéséről és tanulmányozásának mérföldköveiről, a természetben való előfordulásáról valamint bizonyos specifikus típusairól és azok modellezéséről.

A második fejezetben a kollektív mozgások természetét mutatjuk be. Mit nevezünk kollektív mozgásnak, miben különböznek az egyensúlyi és az önjáró rendszerek, hol figyelhetünk meg ilyen jelenségeket a hétköznapokban? Továbbá bemutatjuk néhány kollektív mozgást végző rendszer (baktérium kolóniák, madárrajok) kutatása során elért főbb eredményeket [12].

A harmadik fejezet a swarmalator-okat vezeti be, az előző fejezetek témáinak összekapcsolásával. Bemutatjuk a Kevin P. O’Keefe, Hyunsuk Hong és Steven H. Strogatz által felépített általánosított Kuramoto-modellt és annak az eredményeit [11].

Az utolsó fejezetben a véletlenbolyongó, lokálisan csatolt kétmódusú oszcillátorok számítógépes szimulációs és kísérleti tanulmányozásáról írunk. Először bemutatjuk a vizsgált modellt, majd a Python-ban írt szimuláció eredményeit, amelyek igazolják, hogy a fent említett rendszerben is kialakulhat globális szinkronizáció. Végül bemutatjuk a kísérletet: milyen robotokat használtunk, hogyan mértük a rendszer pulzuserősségét és a méréseink hogyan függenek össze a szimulációs eredményekkel.

1. Szinkronizáció

A szinkronizáció egy olyan jelenség, amely során két vagy több oszcillátor valamilyen csatolás révén kölcsönhat, és ezáltal kölcsönösen megváltoztatva egymás fázisát összehangolják rezgésüket. A szinkronizáció számos természetes és mesterséges rendszerben megfigyelhető.

1.1. Történelmi áttekintés

Amikor a szinkronizációról beszélünk fontos megemlíteni Christiaan Huygens, holland származású fizikust és csillagást, aki a XVII. század második felében, elsőként figyelte meg és írta le a jelenséget. Huygens főként az optikai tanulmányairól, valamint az órák és teleszkópok építéséről híres, de jelentős szerepe volt a modern integrál- és differenciálszámítás megteremtésében is.

A szinkronizáció jelenségét Huygens először két ingaóra között figyelte meg, amelyek egy közös tartóelemről lógtak, egy hajóban felfüggesztve. Sok munkát fektetett az általa feltalált és szabadalmaztatott ingaóra pontosságának a növelésébe, különös tekintettel a hajózásban használt órákra. Tapasztalatait és eredményeit feljegyezte "Az ingaóra" (Horologium Oscillatorium) című művében [13], ahol említést tett a az ingák szinkronizálódó viselkedéséről. A jelenséget az órákat összekötő közös tartórúd, észrevehetetlenül kis, mozgásával magyarázta.

Jóval később, a XIX. század közepén John William Strutt (III. Lord Rayleigh) akusztikus rendszerekben figyelte meg a szinkronizáció jelenségét. Azt vette észre, hogy két egymás mellett elhelyezett azonos de különálló orgonasíp kölcsönhat, ami eredményezheti egymás kölcsönös elfojtását vagy azt, hogy a sípok a köztük levő elkerülhetetlen, kis különbségek ellenére is tökéletesen egyhangúan szólnak [14].

A XX. század elején W. H. Eccles és J. H. Vincent szinkronizációt figyeltek meg trióda generátorok között. A trióda generátor egy elektroncsövön alapuló elektromos berendezés amely alkalmas időben periodikusan váltakozó áram előállítására. A kísérletben két, enyhén különböző paraméterekkel ellátott, ez által enyhén különböző frekvenciájú, generátort kapcsoltak össze. A megfigyelésük szerint a generátorok a kapcsolás révén azonos frekvencián kényszerültek rezegni [15].

Néhány évvel később Balthasar van der Pol és Edward Appleton megismételték a fent leírt kísérletet. Arra a következtetésre jutottak, hogy egy trióda genereátor frekvenciája módosítható egy eltérő frekvenciájú és sokkal kisebb erősségű jellel is. Ez a megfigyelés nagy előrelépést jelentett a rádiózásban, hiszen így stabilizálni tudták a nagy teljesítményű jelgenerátorok frekvenciáját egy gyengébb, de annál pontosabb jellel [16].

Jean-Jacques Dortous de Mairan, francia származású matematikus és fizikus, már a XVIII. század elején megfigyelte, a növények leveleinek a napszakok váltakozásával összhangban történő fel-le mozgását. Megvizsgálta, hogy mi történik ha a tengeri bab növény teljes sötétségbe kerül több napra. A levelek mozgása változatlan maradt, ami arra enged következtetni, hogy nem a megvilágítás vezérli a mozgást, hanem a növény belső órája, amely információt szolgáltat a napszakok váltakozásáról [17].

A XX. század közepétől már széles körben kutatott területté vált a szinkronizáció jelensége viszont napjainkban sem számít még, közel sem kimerült területnek. Egyre több matematikai modellt építenek fel, különböző rendszerek leírására, ezzel elősegítve bizonyos biológiai és társadalmi jelenségek megértését [18].

1.2. Szinkronizáció az élővilágban

Elsőként Engelbert Kaempfer holland származású fizikus jegyezte le megfigyeléseit a XII. század vége felé, oszcilláló rendszerek nagy populációjának a szinkronizációjáról. Kaempfer ázsiai utazása során megfigyelte, hogy a világító férgek nagyobb csoportjai miután letelepsznek egy fán képesek látszólag teljesen egyszerre felvillantani majd eloltani fényüket [18].

Ezt követően a keleti utazók rendszeresen számoltak be a szentjánosbogarak hasonló viselkedéséről, viszont a történetek hitelességének a megkérdőjelezése miatt a tudomány nem fordított rá különösebb figyelmet egészen a XX. század elejéig.

Philip Laurent 1917-ben a Science folyóiratban írt a jelenségről [19]. Szerinte a szentjánosbogaraknak semmi közük a megfigyelt jelenséghez, a villogást a szemhély hirtelen történő fel- és lehúzása okozza. Ugyanebben az időszakban több elképzelés is megjelent a Science-ben, amelyek ugyancsak a szentjánosbogarak összehangolt villogását próbálták magyarázni. Egyesek szerint a populációban lennie kell egy "karmester" egyednek, amelyik irányítja a többi, mások szerint a légköri körülmények felelősek a villogásért.

Az 1960-as évek végén figyeltek fel a szinkronizáció egyik kulcsfontosságú feltételére [2]. A szentjánosbogarak akkor is ritmusosan villognak ha teljesen el vannak szigetelve társaiktól. Ez a megfigyelés ugyanarra enged következtetni, mint Dortous de Mairan tengeri babos kísérlete, hogy az élőlények egy belső órával rendelkeznek, ami vezérli a periódikus viselkedésüket.

John Buck biológus tette a másik kulcsfontosságú megfigyelést a témában, aki szentjánosbogarakat gyűjtött és kísérleteket végzett velük [20]. Elsőként azt figyelte meg, hogy, ha egy szobában sok egyedet eresztet szabadon, azok addig mozgolódnak, amíg le nem tudnak szállni a falakra egymástól legalább 10 cm távolságban. Ezt követően egy rendszertelen villogásba kezdenek, minden egyed a saját belső órája által diktált frekvencián. Idővel kisebb, két három rovarból álló csoportok szinkronizációja figyelhető meg. Ezekhez egyre több és több másik rovar és rovarcsoport csatlakozik míg végül az összes szentjánosbogár azonos fázisban kezd villogni.

A fent leírt megfigyelésből következik, hogy a szentjánosbogarak valamilyen módon változtatni tudják a frekvenciájukat a környezetük viselkedésének függvényében. Ahhoz, hogy ezt a feltevés igazolják laboratóriumi körülmények között mesterséges fénnel világítottak meg egy szentjánosbogarat, hogy a környezetének a villogását imitálják és közben mérték a bogár választását. A kísérletből kitűnt, hogy a szentjánosbogarak, fajoként különböző körülmények között, változtatnak a villogásuk ritmusán annak érdekében, hogy csökkentsék a fáziskülönbségüket a környezetükkel.

Összegezve a fent leírt megfigyeléseket, azt mondhatjuk, hogy a szentjánosbogarak villogását egy belső, átállítható oszcillátor vezérli. A szentjánosbogarak folyamatosan jeleket küldenek és fogadnak, ez által kölcsönösen megváltoztatva egymás ritmusát. Az ilyen rendszerekben spontán módon kialakul a szinkronizáció.

Az élővilágban sok más példa van a szinkronizációra, a fent leírthoz hasonló a tücskök ciripelése vagy a békák brekegése. A női munkatársak vagy barátok menstruációs periódusa is szinkronizálódik, de ugyanakkor beszélhetünk a vastaps kialakulásáról vagy a spermiumok összehangolt mozgásáról, ezek a példák mind különböző változatai az önszerveződésnek [21].

1.3. Kuramoto-modell

A Kuramoto-modell alapját Arthur Taylor Winfree fektette le 1967-ben [22]. Rájött, hogy a sok kölcsönható oszcillátor problémája lényegesen leegyszerűsíthető ha feltételezzük, hogy a kölcsönhatás gyenge, az oszcillátorok pedig majdnem azonosak. Winfree továbbá azt feltételezte, hogy

a minden oszcillátor a teljes rendszer által keltett ritmushoz kapcsolódik, ami gyakorlatilag egy átlagtér közelítés.

A Winfree-féle modell a következő matematikai alakban írható fel:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left(\sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

ahol θ_i az i -edik oszcillátor fázisa, ω_i pedig a körfrekvenciája. $X(\theta_j)$ függvény adja meg a j -edik oszcillátor fázisfüggő befolyását a a rendszer többi tagjára, $Z(\theta_i)$ pedig meghatározza az i -edik oszcillátor érzékenységét, hajlamát a frekvenciaváltoztatásra.

Winfree azt is felfedezte, hogy, ha az oszcillátorok körfrekvenciáinak a szórása nagy a csatoláshoz képest akkor a rendszer inkoherens és nem alakul ki szinkronizáció. Ellenkező esetben, egy bizonyos küszöbértéket túllépve a szinkronizáció hirtelen megjelenik.

Yoshiki Kuramoto a fent említett feltevésekből kiindulva, az átlagolás módszerével kimutatta, hogy a gyengén csatolt, hasonló körfrekvenciájú oszcillátorok rendszerének dinamikája a következő egyenlettel írható le:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

ahol Γ_{ij} a kölcsönhatási függvény [23]. Kuramoto felismerte, hogy az ilyen egyenleteket még mindig nehéz általánosan elemezni és, amint azt már Winfree előrevetítette, az átlagtér esete a legmegoldhatóbb. A Kuramoto-modell a lehető legegyszerűbb egyenlően súlyozott szinuszos kölcsönhatási függvénnyel dolgozik:

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (3)$$

ahol $K \geq 0$ a csatolás erősségét meghatározó állandó, az $1/N$ faktor pedig az $N \rightarrow \infty$ esetben biztosítja, hogy megfelelően viselkedjen a modell. Így a rendszer dinamikáját leíró egyenlet a következő lesz:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

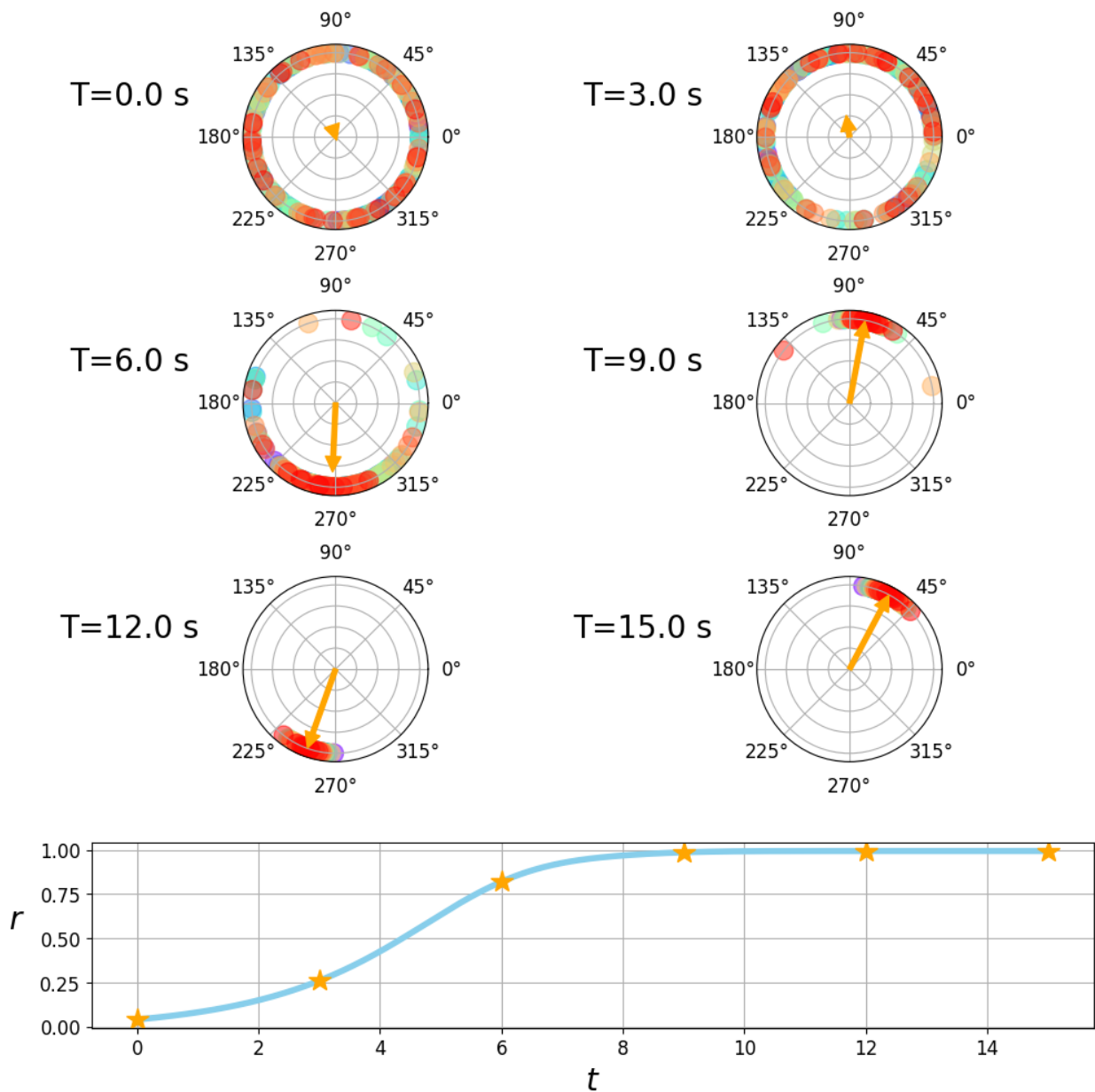
A körfrekvenciák eloszlását a $g(\omega)$ sűrűségfüggvény határozza meg, amelyet az egyszerűség kedvéért egymódusúnak és az átlagos érték körül (Ω) szimmetrikusnak választunk meg. A forgásszimmetriának köszönhetően áttérhetünk egy Ω -val forgó rendszerbe és ezáltal az átlagos körfrekvencia

értéket 0-ra állítjuk be. Ezután ω_i az i -edik oszcillátor körfrekvenciájának az átlagos értéktől való eltérését jelöli. A sűrűségfüggvény szimmetriája a következőképpen írható fel:

$$g(\omega) = g(-\omega) \quad (5)$$

bármely ω értékre. Az egymódus feltétele matematikai alakban a következő:

$$g(\omega) \geq g(v) \iff |\omega| \leq |v| \quad (6)$$



1.1. ábra. Fent: $N = 200$ darab oszcillátor fázisa és a hozzájuk tartozó komplex rendparaméter a szinkronizáció különböző pillanataiban. Lent: a θ_i fázisok koherenciája (r) az idő (t) függvényében. A csatolási állandó $k = 1$ és az átlagos körfrekvencia $\Omega = 1\text{ rad/s}$.

Ahhoz, hogy az átlagtér jelleg egyértelműbbé váljon, bevezethetjük a komplex rendparamétert:

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (7)$$

ahol ψ a fázisok átlag értéke, r pedig a fázisok koherenciájának a mértéke, ami 0 és 1 között vehet fel értékeket. Beszorozva az egyenlet mindkét felét $e^{-i\theta_i}$ -vel a következőt kapjuk:

$$re^{i(\psi-\theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j-\theta_i)} \quad (8)$$

Az imaginárius tagokat egyenlővé tesszük:

$$r \cdot \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (9)$$

Feltűnik, hogy az egyenlet jobboldalán lévő tag megjelenik a (4)-es egyenletben, ezért behelyettesíthetünk:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \cdot \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Ebben a formában már egyértelművé válik, hogy az oszcillátorok csak az átlagtér mennyiségein keresztül (ψ és r) hatnak kölcsön egymással. Az egyes oszcillátorok fázisa a ψ átlagos fázis felé módosul az r koherenciával arányos erősségű effektív csatolás (Kr) révén [23].

Az 1.1-es ábrán a fent bemutatott modell alapján készült szimuláció eredményeit ábrázoljuk. Az ábra felső részén az oszcillátorok fázisa valamint a komplex rendparaméter látható, amely a *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators* [23] című cikk, 1-es ábrájának a reprodukciójaként készült, 6 különböző időpillanatra. Az ábra alsó részén ugyanezen cikk 2-es ábrájának $K > K_c$ (szinkronizáció kialakulásának feltétele) eredményeit reprodukáltuk, ami a rendparaméter időfüggését mutatja meg. K_c a kritikus csatolási erősség, az a legkisebb K érték, amire még kialakul a szinkronizáció.

1.4. Kétmódusú sztochasztikus oszcillátorok

Kétmódusú oszcillátorról akkor beszélünk ha a periódus sűrűségfüggvényének két, jól elkülöníthető lokális maximuma van: az oszcillátorok két különböző módusban üzemelhetnek.

Sztochasztikus oszcillátorról akkor beszélünk, ha a periódus időben fluktuál, mint minden va-

lós oszcillátor esetén. A két módus és a sztochasztikus jelleg megfigyelhető biológiai és fizikai rendszerekben egyaránt. Példának említeném az interneuronokat a talamuszban [24] és a tapsoló embereket [5].

Az utóbbi példa [5] leírásához azonos pulzus-csatolt kétmódusú sztochasztikus oszcillátorokat tekintünk. Az oszcillátorok periódusa három szakaszból áll, az időtartamuk pedig τ_A , τ_B és τ_C .

Az A szakasz szolgáltatja az oszcillátoroknak a sztochasztikus jelleget, tehát τ_A értéke a rendszer minden tagjára különböző és egy exponenciális eloszlást mutat:

$$P(\tau_A) = \frac{1}{\tau^*} \exp\left(-\frac{\tau_A}{\tau^*}\right), \quad (11)$$

ahol τ^* a τ_A -k átlag értéke $\implies \tau^* = \langle \tau_A \rangle$.

A B szakasz a várakozási idő, amely a ritmust szolgáltatja. Rendszerint ez a szakasz teszi ki a ciklus leghosszab részét, időtartama kétféle lehet: τ_{B_I} vagy $\tau_{B_{II}}$, amelyeket úgy választunk meg, hogy $\tau_{B_{II}} = 2 \cdot \tau_{B_I}$.

A C szakasz a jel kibocsátása, amely minden oszcillátor esetén állandó, a példához ragaszkodva azt mondhatjuk, hogy ez a tapsolás pillanata. A kibocsátott impulzus intenzitása, a szakasz τ_C időtartama alatt állandó, erőssége pedig $\frac{1}{N}$, ahol N az oszcillátorok száma. A rendszer által kibocsátott össz impulzus:

$$f = \sum_{i=1}^N f_i, \quad (12)$$

ahol f_i az i -edik oszcillátor kimenete, ami $\frac{1}{N}$ illetve 0 értékeket vehet fel annak függvényében, hogy éppen a ciklus C szakaszában van vagy nem.

A rendszer által kibocsátott össz impulzusból vagy össz kimenetből ered a rendszer csatolása és ez határozza meg, hogy adott oszcillátor a B szakaszban, milyen módusban fog üzemelni.

A rendszer minden oszcillátora egy véletlenszerű fázisból és egy véletlenszerű módussal indul, majd onnan folytatja a meghatározott dinamikát. Leszögezzünk egy f^* kimeneti értéket, küszöb paramétert. Amikor az oszcillátorok az A szakasz végére érnek megvizsgálják, hogy az össz kimenet az f^* -nál kisebb vagy nagyobb, és ennek függvényében üzemelnek az I-es (τ_{B_I}) vagy II-es ($\tau_{B_{II}}$) módusban. A B szakasz lejárta után, vagyis miután a kiválasztott módushoz rendelt idő letelt, következik az impulzus kibocsátás a C szakaszban. Az impulzus kibocsátás után újból az A szakasz következik azaz a ciklus ismétlődik. A fent leírt dinamika azt eredményezi, hogy a rendszer "igyekszik" az f^* paraméterhez minél közelebb tartani a pillanatnyi pulzuserősséget.

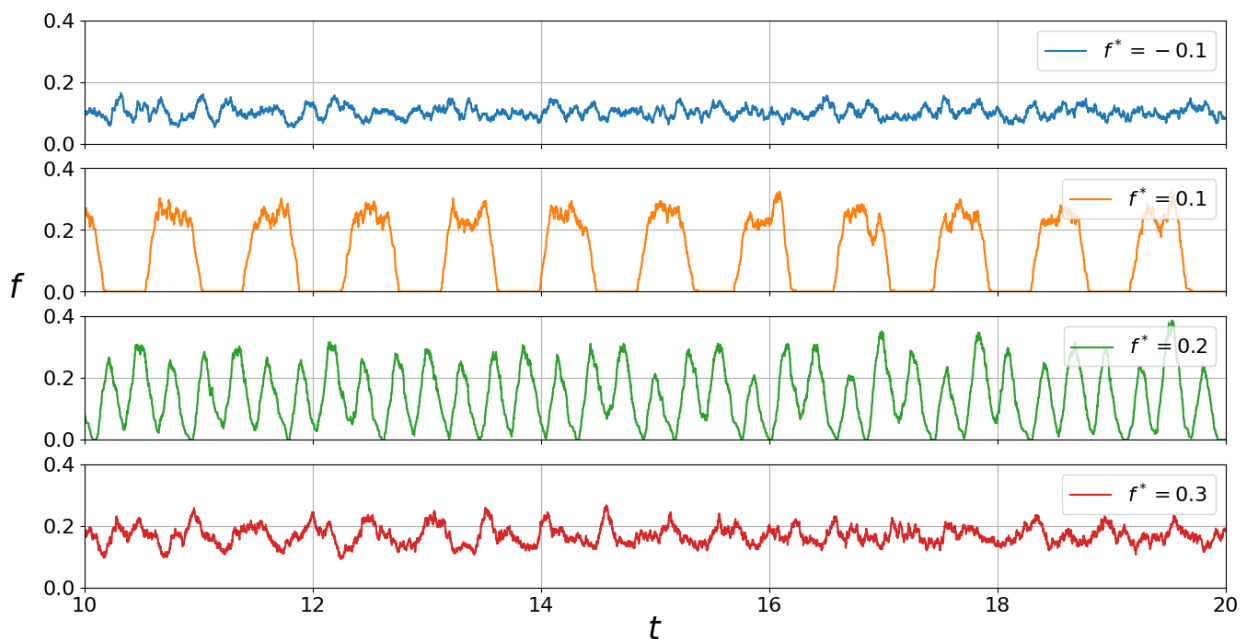
Az egyszerű, csatolás nélküli esethez képest itt a rendszer dinamikája sokkal komplexebb lesz.

Ez annak köszönhető, hogy az oszcillátorok szabálytalanul váltogatják a módusaikat.

Az f^* küszöbparaméter határértékeire a rendszer viselkedése triviális. $f^* = 1$ esetén a rendszer össz kimenete mindig kisebb lesz a küszöbparaméternél ($f < f^*$). Ilyenkor minden oszcillátor mindig az I-es módban üzemel és az össz kimenet, a véletlenszerű kezdeti feltételeknek köszönhetően, véletlenszerűen fluktuál. Ha $f^* = 0$ akkor az oszcillátorok mindig a II-es módban üzemelnek és az előző esethez hasonlóan az össz kimenet fluktuálni fog.

A $0 < f^* < 1$ tartományban nem triviális a rendszer viselkedése, az oszcillátorok váltogatják módusukat. Ezt a tartomány számítógépes szimulációk segítségével vizsgálták. Feltérképezték az f^*, τ^* paraméter-teret, ahol négy különböző tartományt sikerült elkülönítsenek.

- I. tartomány: szinkronizálatlan régió, az össz kimenet azonos az $f^* = 0$ esettel: $\langle f \rangle = \langle f \rangle_0$.
- II. tartomány: szinkronizált régió, az össz kimenet kvázi-periódikus, a periódus megközelítőleg $\langle T_{II} \rangle = \langle \tau_A + \tau_{B_{II}} + \tau_C \rangle = \tau^* + \tau_{B_{II}} + \tau_C$.
- III. tartomány: az előzőhöz hasonlóan szinkronizált régió, de a periódus jóval kisebb, a $\langle T_I \rangle = \tau^* + \tau_{B_I} + \tau_C$ körül mozog.
- IV. tartomány: szinkronizálatlan régió, $\langle f \rangle = \langle f \rangle_1$.



1.2. ábra. A **csatolt** rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) függvényében, különböző küszöbparaméter értékekre $f^* \in \{-0.1, 0.1, 0.2, 0.3\}$ ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$)

Az 1.2-es ábrán a *Collective Dynamics of Two-Mode Stochastic Oscillators* [5] című cikk 1-es ábráját reprodukáltuk, azzal a különbséggel, hogy a mi szimulációnk $N = 225$ oszcillátorral

dolgozik, nem pedik 200-al.

A vastaps vizsgálatok az f^* felfogható úgy mint az ideális hangerő és pszichológiai eredete van. Egy nem lelkes közönség esetén a küszöbparaméter alacsony, ezért a rendszer az I-es tartományban üzemel, ez az "unott taps". Ha az előadás tetszik a közönségnek, akkor f^* a közönség lelkesedésével nő. Kialakulhat II-es vagy III-as tartománybeli viselkedés: lassú vagy gyors "vastaps". Végül, a teljesen lenyűgözött közönség esetén a küszöb olyan magas, hogy a IV-es tartománybeli viselkedés alakul ki és nem jelenik meg a szinkronizáció (nincs vastaps), ez a viharszerű taps.

2. Kollektív mozgások

A kollektív mozgás olyan jelenség, amely hasonló, kölcsönhatásban lévő, nagyjából azonos abszolút sebességgel mozgó egységek halmazában jelentkezik [12]. Bizonyára mindannyian voltunk már szemtanúi hasonló jelenségeknek, mint például a madárrajok, halrajok vagy juhnyájak mozgásának. Ugyan az élővilágban a legkézenfekvőbb megfigyelni a kollektív mozgást, napjainkban már több fizikai és kémiai rendszerben is kimutatták az egymással kölcsönható, önjáró egységek jelenlétét, amelyek a fentiekhez hasonló viselkedést mutatnak. Ilyenek például a rudak egy rezgő asztalon [25].

A kollektív viselkedés, egy sok hasonló egységből álló rendszerben az egységek közötti kölcsönhatás eredménye. Ez a kölcsönhatás lehet egyszerű, mint a vonzás és taszítás, vagy lehet összetett, ami az egyszerű kölcsönhatások valamilyen kombinációja. A kölcsönhatás létrejöhet a szomszédok között vagy egy mögöttes hálózatban és bizonyos esetben olyan átmenetet eredményezhet, aminek következtében az egységek mozgását szinte teljes mértékben a rendszer többi tagjának együttes hatása uralja.

A kollektív viselkedés fő jellemzője, hogy az egységek, a rendszer többi tagjának hatására, teljesen más mozgásmintázatot követnek, mint ha egyedül mozognának. Ennek következtében érdekes rendeződési jelenségek mutatkoznak, mikor az egységek egyszerre változtatnak mozgásukon, egy közös mintához igazodva [26]. Ilyen viselkedést mutat például az etetés közben megzavart és felrepülő galambok nagyobb csoportja.

Fontos kiemelni a fő különbséget az egyensúlyi és az önjáró rendszerek között. A standard statisztikus fizikában és a biológiában megjelenő kollektív jelenségek közti különbséget az ütközési szabályaik közti különbség okozza. A statisztikus fizikában két részecske összimpulzusa az ütközésük előtt és után állandó vagyis a teljes impulzus megmarad. Ezzel szemben két önjáró részecske összimpulzusa nem egyenő az ütközésük előtt és után. Ha szigorúan az önjáró részecskékből álló rendszert vesszük, akkor azt mondhatjuk, hogy az impulzus nem marad meg. Ebből az következik, hogy nem elhanyagolhatóak a közegbe és a közegen belül disszipálódó impulzusok.

A fent említett, nagyjából azonos abszolút sebességekre vonatkozó, feltétel következtében szükség van egy energiafelvételre, tehát a rendszer nyitott. Az energia, amely többféleképpen jut-

hat a rendszerbe, az impulzus növekedését okozza, amennyiben a rendszer kezdetben rendezetlen állapotból indult.

Fontos megemlíteni, hogy ezen jelentős különbség ellenére számos analógia megfigyelhető az egyensúlyi statisztikai fizikai rendszerek és az önjáró rendszerek között.

A fejezet hátralevő részében különböző önjáró rendszereket fogok bemutatni.

2.1. Baktérium kolóniák

A mikroorganizmusok kolóniái, olyan nagy számú, egymással kölcsönható egységekből álló rendszerek, amelyek makroszkópikus egészként nem triviálisan viselkednek. Erről a nem triviális viselkedésről elsőként Evelyn F. Keller és Lee A. Segel írt 1971-ben [27]. Egy fenomenológiai elméletet dolgoztak ki a kólibaktérium (*Escherichia coli*) mozgásának magyarázatára. Azóta számos csoport foglalkozott a témával így napjainkra már egyértelművé vált, hogy a baktérium kolóniákban kialakulnak turbulens és forgó mozgások valamint fraktál vagy más mintázatok.

Czirók András és csapata azt vizsgálta, hogy a szénabacillus (*Bacillus subtilis*) mozgása hogyan függ az agaragar és a bacilusok számára táplálékként szolgáló pepton koncentrációtól [28]. Azt figyelték meg, hogy a koncentrációk kedvező értékeire a kolónia nem mutat magas szintű szerveződést, míg kedvezőtlen körülmények között, mint például korlátozott tápanyagellátás esetén sejt-differenciálódás és hosszútávú információ átvitel valósul meg.

Számos más, a fentiekhez hasonló, tanulmány jelent meg és jelenik meg napjainkban is, amelyek segítségével egyre átfogóbban megismerjük a baktérium kolóniák kollektív viselkedésének természetét [29][30].

2.2. Madárrajok

A madárrajok rendkívül jól koordinált mozgása évtizedek óta foglalkoztatja a kutatókat. Elsőként Wayne K. Potts vizsgálta madárrajok mozgását az 1980-as évek elején. Nagy időfelbontású felvételeket készített szalonkarajok mozgásáról és képkockáinként tanulmányozta a viselkedésüket. Megfigyelte, hogy bármelyik egyed kezdeményezhet rajmozgásokat, amelyek a kezdeményező egyedtől kiindulva hullámként terjednek végig a rajon [31].

Sok más kutatás foglalkozott a madarak csoportos repülésének különböző jellemzőivel. Vizsgálták a rajbeli pozíciónak az éberségre való hatását, az állományméretet, a leszállási mechaniz-

musokat és külső zavarás hatását a raj mozgására.

Michele Ballerini és csapata sztereometriai számítógépes látásmóddal nagy madárrajok mozgásáról alkottak háromdimenziós képet. Azt figyelték meg, hogy az egyedek az őket körülvevő 6-7 szomszédjukkal hatnak kölcsön ("topológiai megközelítés") [32].

A technológia fejlődésével új módszerek kínálóznak a madárrajok mozgásának minél pontosabb tanulmányozására. Kísérleteket végeztek GPS-adatgyűjtőkkel ellátott galambokkal és azt tapasztalták, hogy a rajban repülő galambok hazatérési teljesítménye lényegesen nagyobb mint az egyedül repülő egyedeké [33].

GPS-el felszerelt galambpárok mozgását is vizsgálták. Ha a két galamb iránypreferenciája kis mértékben tért el akkor a maradnak együtt maradtak és átlagolták útvonalait. Ezzel szemben ha nagy volt az eltérés az iránypreferenciájuk között akkor külön váltak vagy valamelyik egyed vezetővé vált. További kutatások kimutatták, hogy egy rajon belül az egyedek helyzete erősen összefügg a hierarhiában elfoglalt helyzetükkel [34].

3. Swarmalator-ok

Ahogy az 1. fejezetben bemutattuk, a szinkronizáció számos természeti rendszerben megjelenik, példának említhetjük a szentjánosbogarakat, a tapsoló embereket vagy az interneuronokat a talamuszban. Ezen rendszerek elemei összehangolják rezgéseiket, viszont a térben nem mozdulnak el. A 2. fejezetben bemutattuk az önszerveződés egy másik formáját: a kollektív mozgást vagy más szóval rajzást (angolul: **swarming**). Ide tartoznak a hal-, rovar- és madárrajokban kialakuló mozgásmintázatok. A rendszert alkotó egységek kölcsönhatnak, ami egy teljesen más viselkedést eredményez, mint, ami különálló egységek esetén megfigyelhető.

Swarmalatorok rendszeréről akkor beszélünk, ha a rendszert alkotó egységek (oszcillátorok) egy időben szinkronizálódnak és rajznak (angolul: **sync and swarm**), amint a megnevezésük is sugallja.

Kevin P. O’Keeffe, Hyunsuk Hong és Steven H. Strogatz egy általánosított Kuramoto-modell felépítésével tanulmányozták a swarmalatorok viselkedését [11]. Azt figyelték meg, hogy a rendszer hosszú távon öt féle kollektív állapotba szerveződhet. Ezek az állapotok megfigyelhetők a spermiumok csoportjaiban, a japán levelibékák között valamint más biológiai és fizikai rendszerekben.

A szinkronizáció és a kollektív mozgás tanulmányozásában sok a közös vonás. Mindkét esetben nagy önszerveződő rendszerekkel dolgozunk, amelyeket sok, egymással egyszerű szabályok szerint kölcsönható egység alkot. Minkét terület a statisztikus fizika és a nemlineáris dinamika metszéspontjában helyezkedik el, mégis nagyjából különálló maradt a két terület. A rajzás/kollektív mozgás tanulmányozása során az állatok mozgására fókuszálunk és elhanyagoljuk a belső állapotuk dinamikáját. A szinkronizáció vizsgálata pont az ellentétes eset. Az oszcillátorok belső dinamikájával foglalkozik és figyelmen kívül hagyja a térbeli elmozdulásukat. A robotika és a fejlődésbiológia terén végzett kutatásokban felmerült a mozgó oszcillátorok problémája, ami szükségessé tette a két terület összecsatolását. Ezekben az esetekben az oszcillátorok térbeli helyzete befolyásolja fázisukat, de fordított irányban nincs kölcsönhatás, a fázistól nem függ a térbeli elmozdulás. Ezekben a modellekben a mozgás gyakran véletlen bolyongás.

Elsőként swarmalatorokat Oleg A. Igoshin és csapata modellezett 2001-ben [35]. Myxobaktériumok (*Myxobacteria*) kolóniájának kollektív viselkedését tanulmányozták és rájöttek, hogy a

baktériumok térbeli mozgását befojásolja egy időben periódikusan változó belső biokémiai szabadságfok, amelyet ők oszcillátorokként modelleztek. Kísérletileg igazolták, hogy ezen oszcillátorok fázisának változása függ a szomszédok térbeli sűrűségétől, ami arra enged következtetni, hogy kétirányú a csatolás a térbeli- és a fázisdinamika között.

3.1. Általánosított Kuramoto-modell

Feltételezzük, hogy a swarmalator-ok szabadon elmozdulhatnak a térben. A rendszer dinamikáját leíró egyenletek:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\mathbf{I}_{att}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)F(\theta_j - \theta_i) - I_{rep}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)], \quad i = 1, \dots, N \quad (13)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N H_{att}(\theta_j - \theta_i)G(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (14)$$

ahol N a swarmalator-ok száma, $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ az i -edik swarmalator pozíciója, θ_i , ω_i és \mathbf{v}_i pedig a fázisa, körfrekvenciája és sebessége. \mathbf{I}_{att} és \mathbf{I}_{rep} a térbeli vonzó- és taszítóerőt meghatározó függvények, H_{att} pedig a fázis-kölcsönhatási függvény. F a fázishasonlóság befolyása a térbeli vonzóerőre, G meg a térbeli közelség befolyása a fázis-kölcsönhatásra.

Az \mathbf{I}_{att} , \mathbf{I}_{rep} és G függvényeket hatványfüggvényeknek választjuk meg. A Kuramoto-modellből kiindulva H_{att} szinusz függvény lesz, így a modell új alakja felírható a következő egyenletekkel:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i + \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j \neq i}^N \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} [A + J \cos(\theta_j - \theta_i)] - B \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} \right\}, \quad i = 1, \dots, N \quad (15)$$

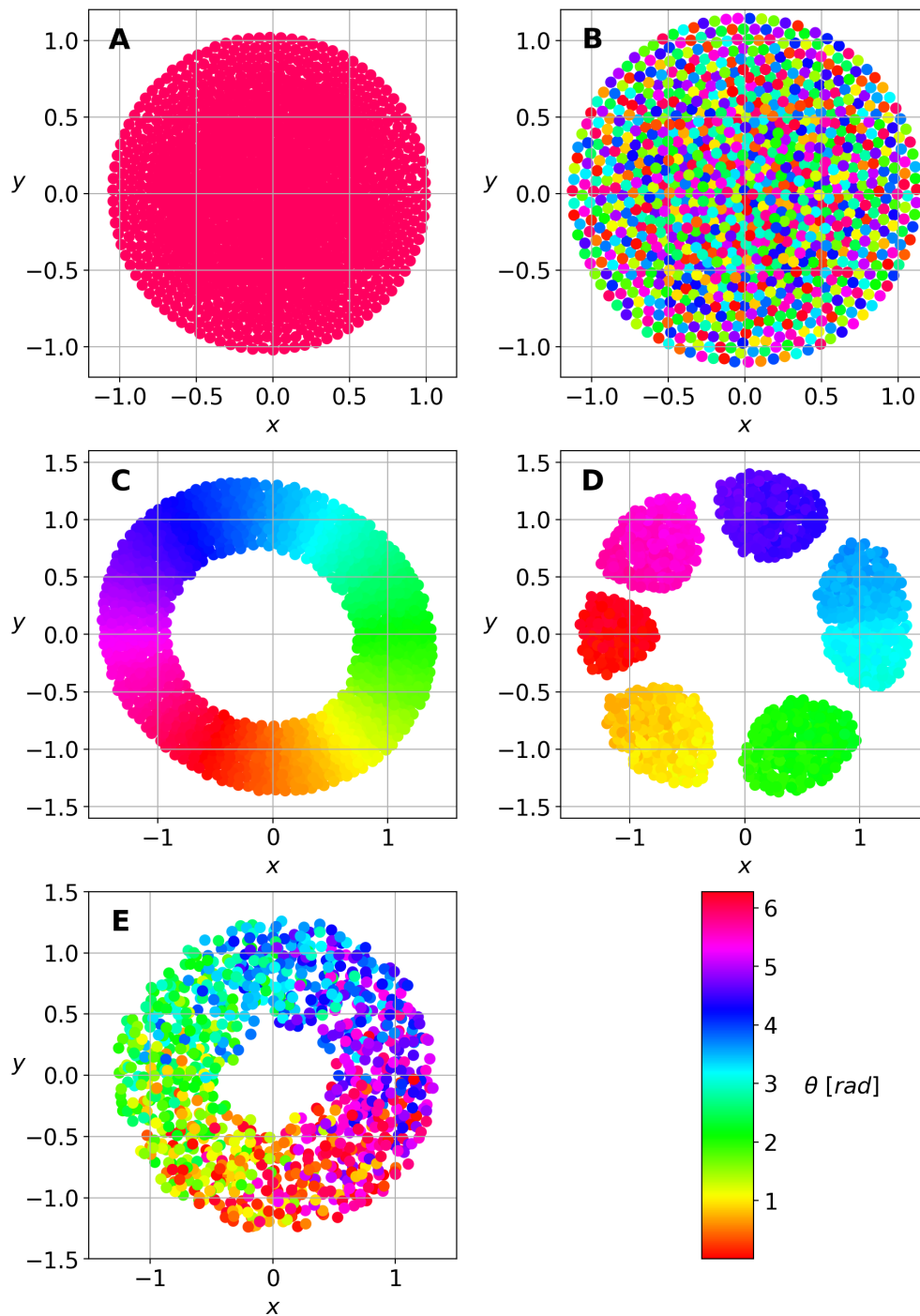
$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j \neq i}^N \frac{\sin(\theta_j - \theta_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}, \quad i = 1, \dots, N \quad (16)$$

Abban az esetben, ha egyforma swarmalator-okat tekintünk azaz $\omega_i = \omega$ és $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$, akkor bizonyos vonatkoztatási rendszer megválasztása esetén $\omega = v = 0$. Az idő és tér újraszkalázásával beállíthatjuk $A = B = 1$. Ebben az esetben a (15) és (16) egyenletek tovább egyszerűsödnek:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j \neq i}^N \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} [1 + J \cos(\theta_j - \theta_i)] - \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} \right\}, \quad i = 1, \dots, N \quad (17)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{K}{N} \sum_{j \neq i}^N \frac{\sin(\theta_j - \theta_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}, \quad i = 1, \dots, N \quad (18)$$

Látható, hogy a fenti rendszerben már csak két paraméter maradt, J és K . J határozza meg, hogy a fázis-hasonlóság milyen mértékben befolyásolja a térbeli vonzást, K pedig a 1. fejezetben tárgyalt Kuramoto-modellhez hasonlóan, a fáziscsatolás erősségét meghatározó állandó.



3.1. ábra. $N = 1000$ darab swarmalator pozíciója és fázisa: **A** $\Rightarrow T = 100$ s, $dt = 0.01$ s, $J = 0.1$, $K = 1$; **B** $\Rightarrow T = 100$ s, $dt = 0.01$ s, $J = 0.1$, $K = -1$; **C** $\Rightarrow T = 100$ s, $dt = 0.01$ s, $J = 1$, $K = 0$; **D** $\Rightarrow T = 1000$ s, $dt = 0.05$ s, $J = 1$, $K = -0.1$; **E** $\Rightarrow T = 1000$ s, $dt = 0.05$ s, $J = 1$, $K = -0.75$;

$K > 0$ esetén a rendszer arra törekszik, hogy minimalizálja a fáziskülönbséget a swarmalátorok közt, ellenkező esetben ($K < 0$) pedig, hogy maximalizálja. $J > 0$ esetén az egymáshoz közeli fázisú swarmalátor-ok igyekeznek egymáshoz minél közelebb elhelyezkedni viszont $J < 0$ esetén az ellentétes fázisú swarmalátorok vonzzák erősebben egymást.

A 3.1-es ábrán az *Oscillators that sync and swarm* [11] című cikk 2-es és 5-ös ábráját reprodukáltuk, a cikkben leírt numerikus kísérletek elvégzésével. A szimuláció kezdeti pillanatában a swarmalátorok egy 2 egység oldalhosszúságú négyzet alakú területen helyezkednek el, a fázisuk pedig $-\pi$ és π között alakul. A kezdeti pozíció és fázisértékeket véletlenszerűen generálták egy egyenletes eloszlás szerint az említett tartományokban. Azt vették észre, hogy a paraméterek bizonyos értékeire öt különböző állapot idézhető elő. Az első három állapot stacionárius (3.1.A, B és C), a pozíciók és a fázisok sem változnak. A negyedik és ötödik állapotban (3.1.D és F) a swarmalátorok mozognak és a fázisuk is változik, viszont a swarmalátor-sűrűség mind az öt esetben időfüggetlen.

Az első állapotban (3.1.A) a swarmalátorok körszimmetrikus, kristályszerű alakzatban helyezkednek el és teljesen szinkronizálódik a fázisuk. Lévéen, hogy térben stacionáriusak és a fázisuk is megegyezik, ezt az állapotot statikus szinkronnak nevezzük. A második állapotban (3.1.B) a swarmalátorok térbeli elhelyezkedése az első esethez hasonló, viszont a fázisok nem szinkronizálódnak. A tér egy adott pontjában az összes fázis azonos valószínűséggel fordulhat elő. Ezt nevezük statikus asszinkron állapotnak. A harmadik állapotban (3.1.C) a $K = 0$ csatolási paraméternek köszönhetően a swarmalátorok fázisa nem változik. J értéke pozitív ezért két swarmalátor között a fázishasonlóság növeli a vonzóerőt. Belátható, hogy ennek következtében a swarmalátor-ok egy gyűrűben helyezkednek el, úgy hogy a szomszédok közötti fáziskülönbség a lehető legkisebb legyen, ezt nevezük statikus fázishullámnak. Ha a K paramétert csökkenteni kezdjük, $K < 0$ -ban eljutunk a negyedik állapothoz (3.1.D), amikor a statikus fázishullám felszakad kisebb, halmazokra: osztott fázishullám. Egy halmazon belül a swarmalátor-ok fázisa nagyából megegyezik, viszont a különböző halmazok átlagos fázisa jelentősen eltér. Tovább csökkentve a K -t, eljutunk az ötödik állapothoz (3.1.E), az aktív fázishullámhoz, amikor a swarmalátor-ok térszöge és fázisa is ciklikusan változik.

4. Véletlen bolyongást végző, lokálisan csatolt kétmódusú oszcillátorok

Ebben a fejezetben bemutatjuk a véletlen bolyongást végző, lokálisan csatolt kétmódusú oszcillátorok modelljének felépítését, majd a szimulációs és kísérleti úton történő mérések eredményeit. Beszélünk a mérések menetéről, a kísérlet lebonyolításáról és az adatok feldolgozásáról.

4.1. A modell felépítése

Az általunk vizsgált modell alkotóelemei a lokálisan csatolt kétmódusú oszcillátorok, melyek véletlen bolyongást végeznek.

4.1.1. Lokális csatolás

Lokális csatolás alatt azt értjük, hogy az egyes oszcillátorok üzemelési módját csak az őket környező néhány oszcillátor állapota befolyásolja nem pedig az egész rendszer. Másképp úgy fogalmazhatjuk meg, hogy az egyes oszcillátorok csak egy R sugarú körön belül lévő társaikról kapnak információt.

A 1.4-es alfejezetben használt jelöléshez hasonlóan f_i az i -edik oszcillátor kimenete, ami $\frac{1}{N}$ vagy 0 értéket vehet fel. A 3.1-es alfejezetben használt jelöléshez hasonlóan $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ az i -edik oszcillátor pozíciója. Az i -edik oszcillátor által mért pulzuserősséget f'_i -vel jelöljük és a következő egyenlet adja meg:

$$f'_i = \sum_{j=1}^N f_j H_0(R - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|), \quad i = 1, \dots, N, \quad (19)$$

ahol H_0 a Heaviside függvény:

$$H_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

Látható, hogy $H_0(R - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ értéke 1 ha az i -edik és a j -edik oszcillátor közötti távolság kisebb, mint R és 0, ha nagyobb. Lévén hogy $R < D_x$ következik, hogy $f'_i < f$ bármely $i \in \{1, 2, \dots, N\}$

esetén, ahol f a rendszer össz pulzuserőssége.

$$f = \sum_{i=1}^N f_i \quad (21)$$

A fentiek alapján belátható, hogy lényegesen kisebb f^* küszöbparaméter értékre várható a szinkronizáció kialakulása, mint a globálisan csatolt rendszerben.

A lokálisan csatolt kétmódusú oszcillátorok az 1.4-es alfejezetben bemutatott ciklussal működnek. Az egyetlen különbség, hogy amikor egy oszcillátor az A szakasz végére ér, akkor az általa mért f_i' pulzuserősséggel hasonlítja össze a f^* küszöbparamétert, nem pedig az össz pulzuserősséggel. Ha $f_i' < f^*$ akkor az oszcillátor az I-es módban üzemel (τ_{BI}), ellenkező esetben a II-es módban (τ_{BII}).

4.1.2. Véletlen bolyongás

A véletlen bolyongás egy sztochasztikus folyamat, amely egy véletlenszerű útvonalat ír le valamely matematikai halmazon. Legegyszerűbb formája az egydimenziós véletlen bolyongás. Ebben az esetben egy részecske (véletlen bolyongó, angolul *random walker*) egy egydinemziós rács 0 pontjából indul és minden lépésben véletlenszerűen és azonos valószínűséggel átugrik valamely szomszédos rácspontra: véletlen bolyongás a \mathbb{Z} egész számok halmazán [36][37].

A modellt úgy építettük fel, hogy a rendszert alkotó egységek véletlen bolyongást végeznek egy kétdimenziós négyzetrácsra, amelynek a rácscsillandóját a -val jelöljük. A véletlen bolyongó egységek/részecskék azonos valószínűséggel ugranak a 4 szomszédos szabad csomópont valamelyikére. Azt a csomópontot nevezzük szabadnak, amelyiken nem helyezkedik el egyetlen véletlenbolyongó egység sem.

Minden szabad szomszédra történő ugrásnak $P_f = \frac{1}{z}$ a valószínűsége, ahol z a szabad szomszédok száma és minden elfoglalt szomszédra ugrás valószínűsége $P_f = 0$. Amennyiben az összes szomszéd foglalt az ugrás nem történik meg és a véletlen bolyongó a helyén marad. Annak érdekében hogy elkezdődjön a mozgás a részecskék közötti d távolságot úgy választjuk meg, hogy hogy az a rácscsillandónál nagyobb és annak egész számú többszöröse legyen:

$$d = k \cdot a, \quad k \in \{2, 3, 4, \dots\} \quad (22)$$

Annak érdekében, hogy a részecskesűrűség ne változzon a rendszerben szükségünk van egy periodikus peremfeltételre. A rendszert alkotó részecskék kezdetben egy d rácscsillandójú rács csomó-

pontjain helyezkednek el egy D_x és D_y oldalhosszakkal jellemzett téglalapon belül, így a rendszer területét a $D_x + d$ és $D_y + d$ oldalhosszúságú téglalapként határozzuk meg. Amikor egy részecske a téglalap valamelyik oldalán kilépne a rendszerből, rögtön megjelenik a szemben levő oldaltól a távolságra.

Az előző alfejezetben bemutatott lokálisan csatolt kétmódusú oszcillátorok üzemelési ciklusa végén kerül sok a véletlen bolyongás lépésére: egy időtartam nélküli helyváltoztatás a C szakasz után és az A szakasz előtt.

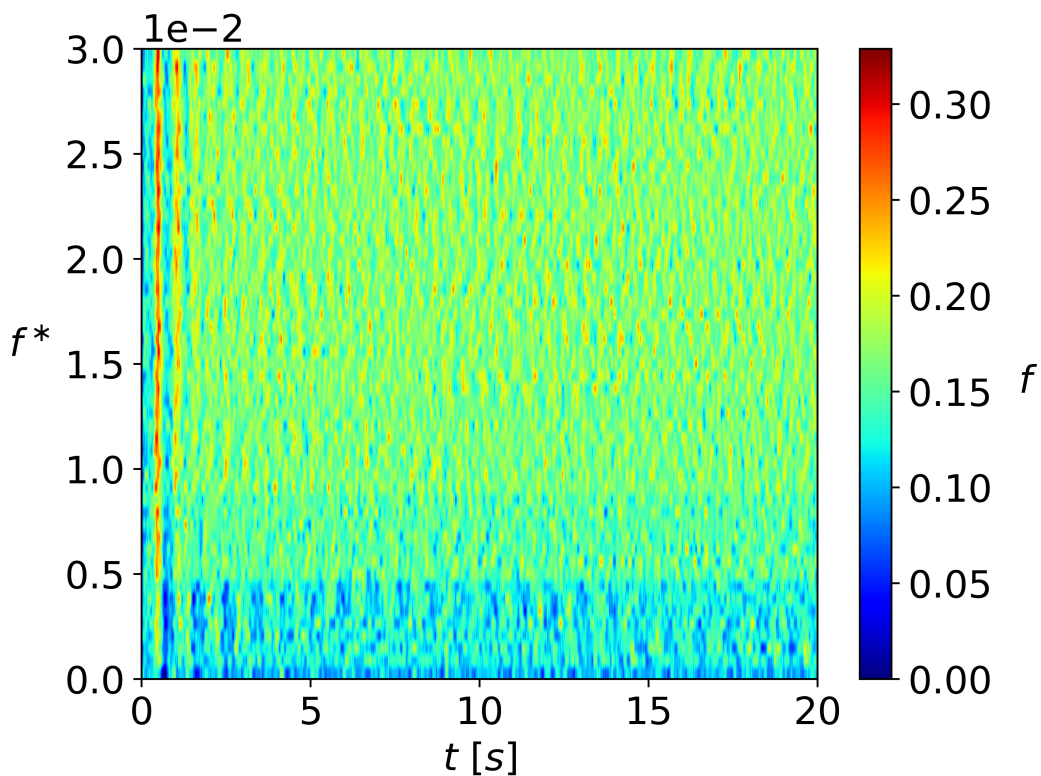
4.2. Szimuláció

Számítógépes szimulációval vizsgáltam az előző alfejezetben bemutatott modell viselkedését. A programot Python-ban írtam és $N = 225$ részecske dinamikáját vizsgáltam vele. Azért választottam négyzetszámot, hogy a részecskéket kezdetben egy négyzet alakú térrészen tudjam egyenletesen elhelyezni. A részecskék közötti d távolságot az egyszerűség kedvéért egységnyiinek választottam így a rendszerem egy $D = D_x = D_y = \sqrt{N} + d = 16$ egység oldalhosszúságú négyzeten belülre van korlátozva. A véletlenbolyongás lépéshossza $a = 0.2$.

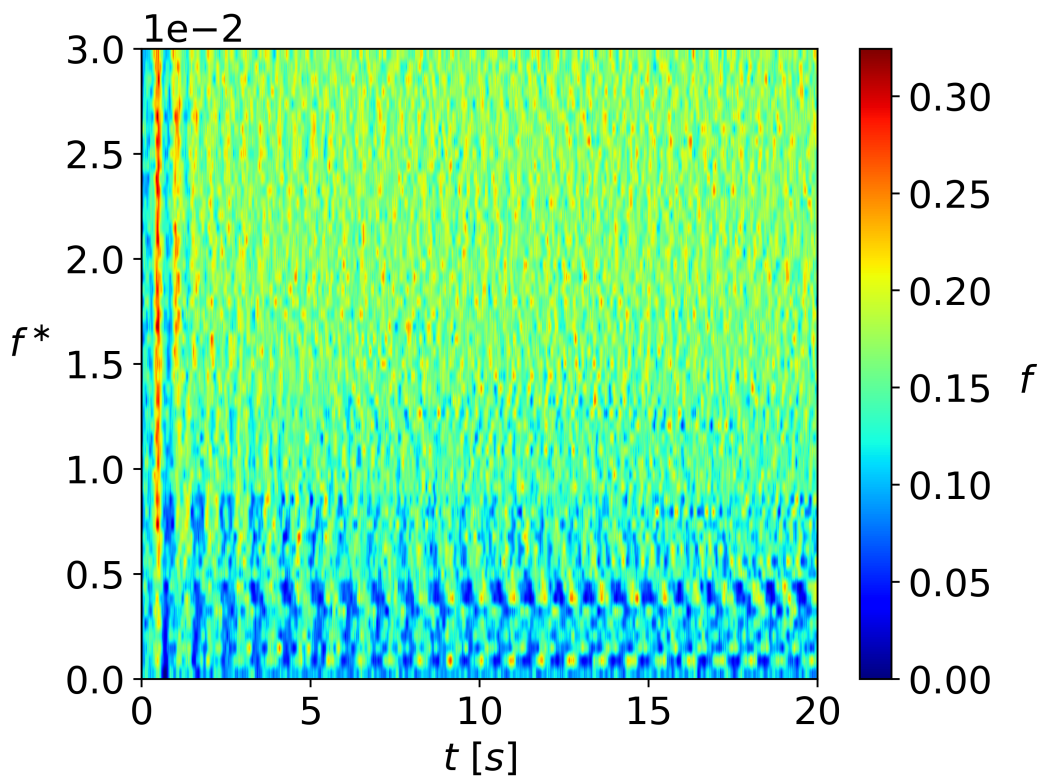
A szimuláció többi paramétere megegyezik az 1.2-es ábra készítéséhez használt szimuláció paramétereivel így releváns lehet az összehasonlítás a két szimuláció eredménye között.

4.2.1. Mérések

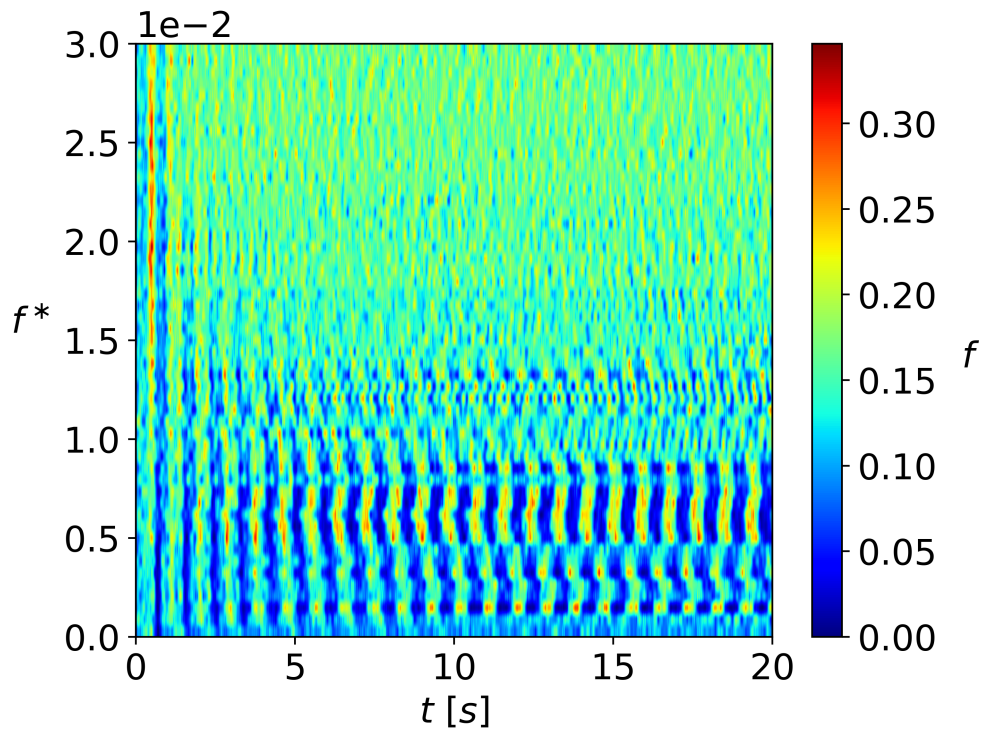
Vizsgáltam, hogy különböző R értékekre ($R \in \{1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$) találok-e olyan f^* küszöbparamétert, amely mellett kialakul a szinkronizáció. Ehhez rendre, minden R érték esetén lefuttattam 51 szimulációt, különböző f^* értékekre és az eredményeket *heatmap* formájában ábrázoltam.



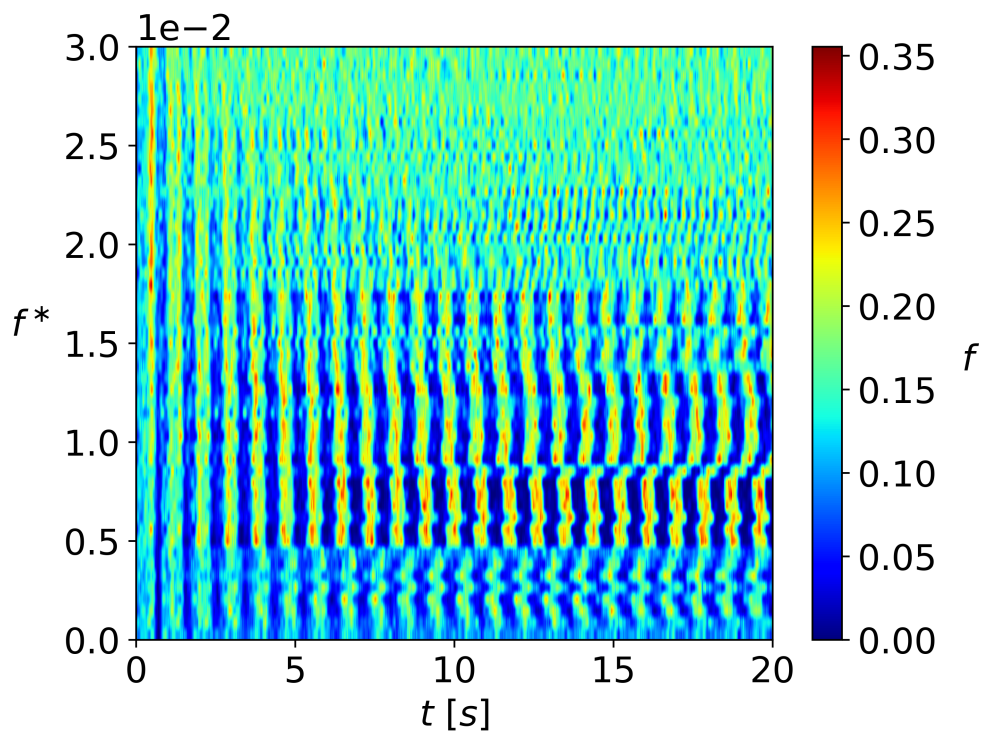
4.1. ábra. A rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) és az $f^* \in [0, 0.03]$ paraméter függvényében ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$, $\mathbf{R} = 1.5$)



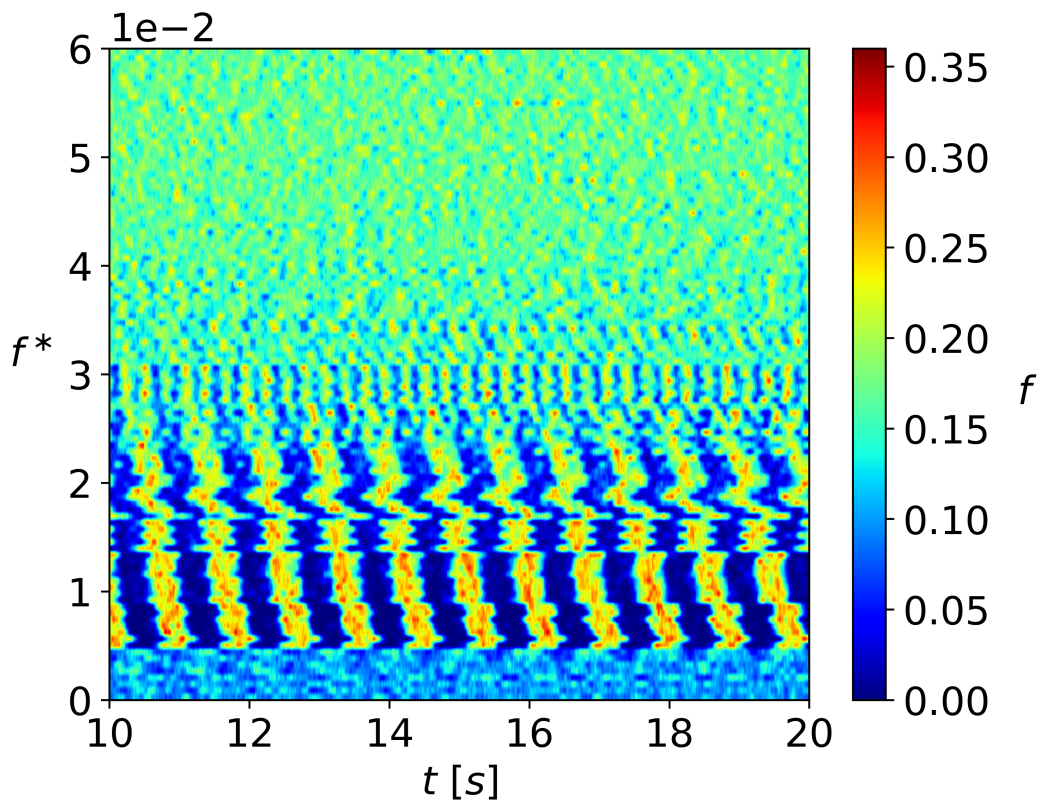
4.2. ábra. A rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) és az $f^* \in [0, 0.03]$ paraméter függvényében ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$, $\mathbf{R} = 2$)



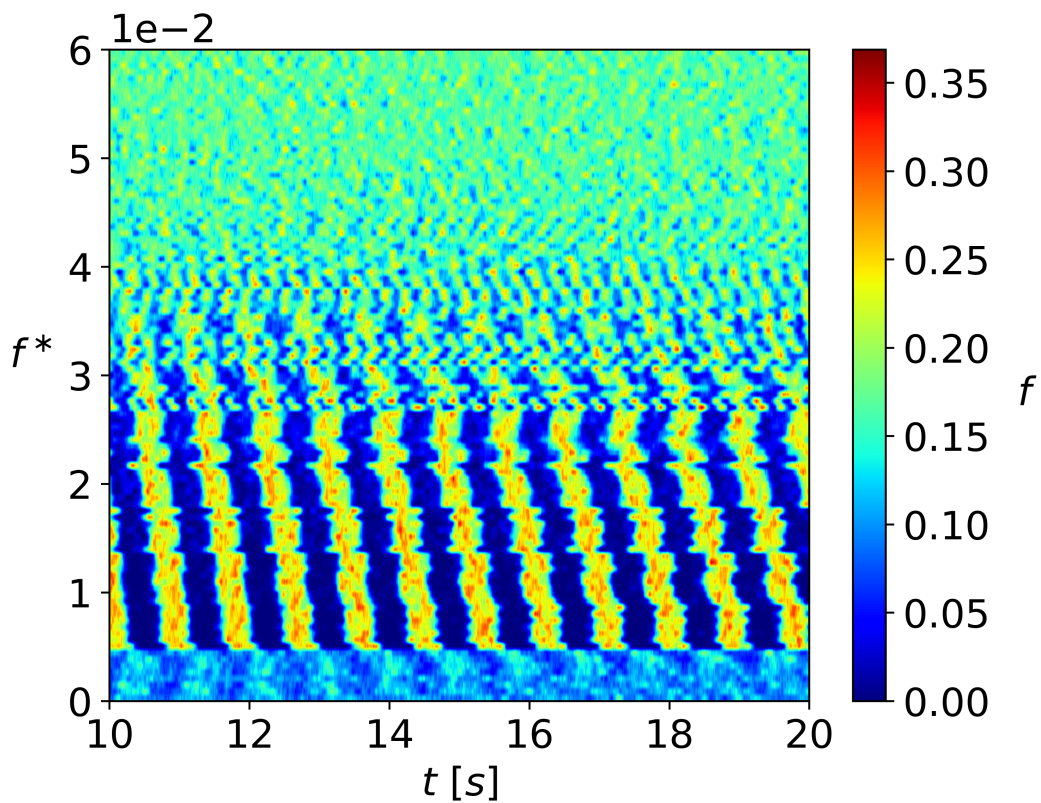
4.3. ábra. A rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) és az $f^* \in [0, 0.03]$ paraméter függvényében ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$, $\mathbf{R} = 2.5$)



4.4. ábra. A rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) és az $f^* \in [0, 0.03]$ paraméter függvényében ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$, $\mathbf{R} = 3$)



4.5. ábra. A rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) és az $f^* \in [0, 0.06]$ paraméter függvényében ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$, $\mathbf{R} = 3.5$)



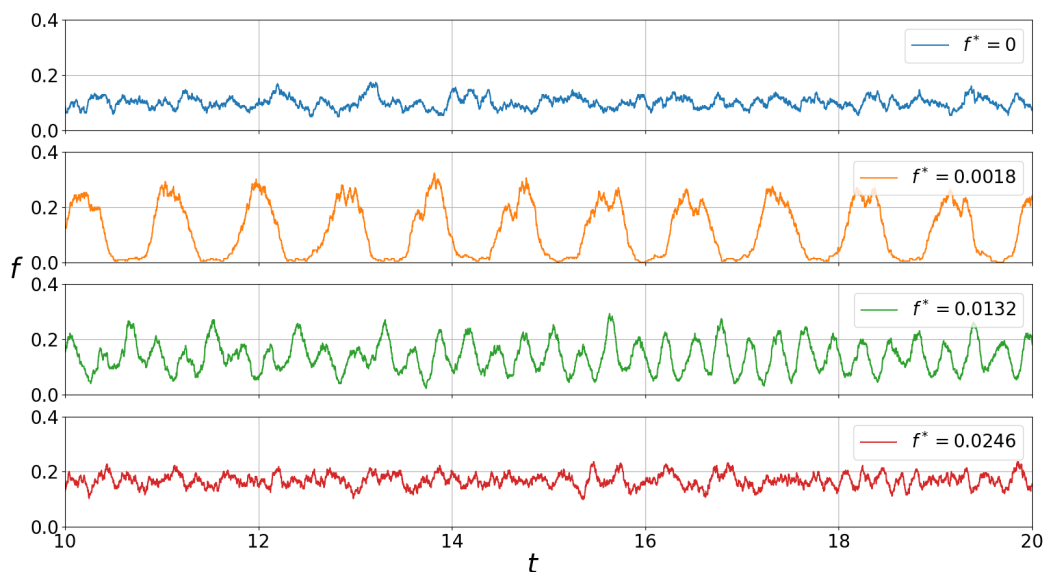
4.6. ábra. A rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) és az $f^* \in [0, 0.03]$ paraméter függvényében ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$, $\mathbf{R} = 4$)

Az első két ábrán (4.1, 4.2) még nem, de a harmadikon (4.3) már megfigyelhető a szinkronizáció, egymást követő kontrasztos sávok formájában. Tehát azt mondhatjuk, hogy $R \geq 2.5$ sugarak esetén létezik olyan f^* küszöbparaméter, amelyre szinkronizáció alakul ki.

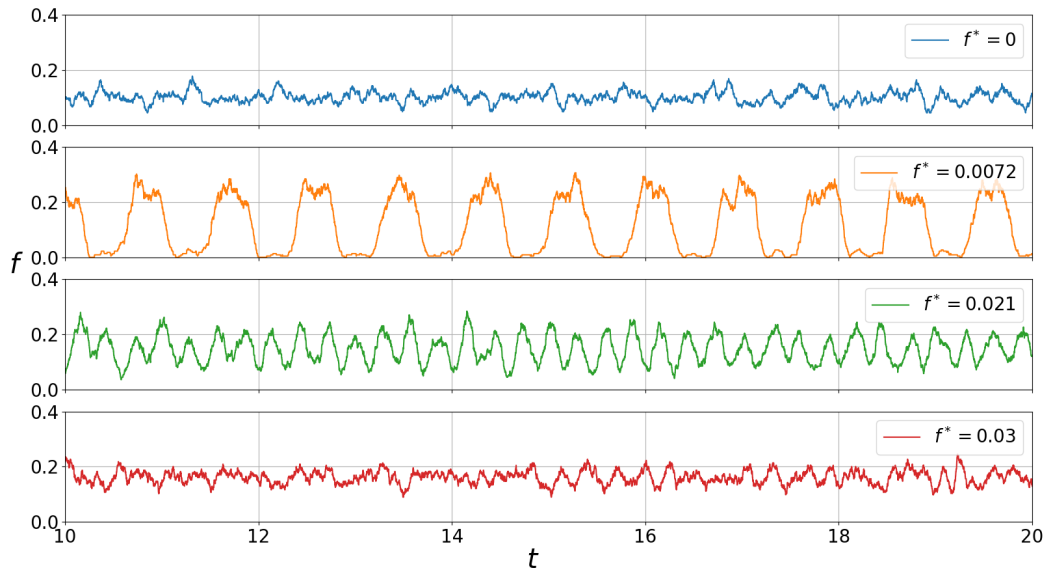
Alaposabban megfigyelve az utóbbi négy ábrát, észrevehető, hogy kétféle periódusú szinkronizáció is kialakulhat különböző küszöbparaméterek esetén. Tekintsük a 4.5-ös ábrát. $f^* = 0.007$ körül a hosszabb periódusra, $f^* = 0.03$ körül pedig a rövidebb periódusra történik a szinkronizáció. Ezek a 1.4-es alfejezetben tárgyalt II. és III. tartománynak felelnek meg. Ugyanakkor megfigyelhető az I. tartomány $f^* = 0.005$ alatt és a IV. tartomány $f^* = 3.1$ fölött.

Újabb négy ábrát készítettem $R \in \{2.5, 3, 3.5, 4\}$ értékekre, az f^* gondos megválasztásával, úgy hogy minden ábrán, a fent említett tartományok mindegyikéből legyen egy szimuláció ábrázolva.

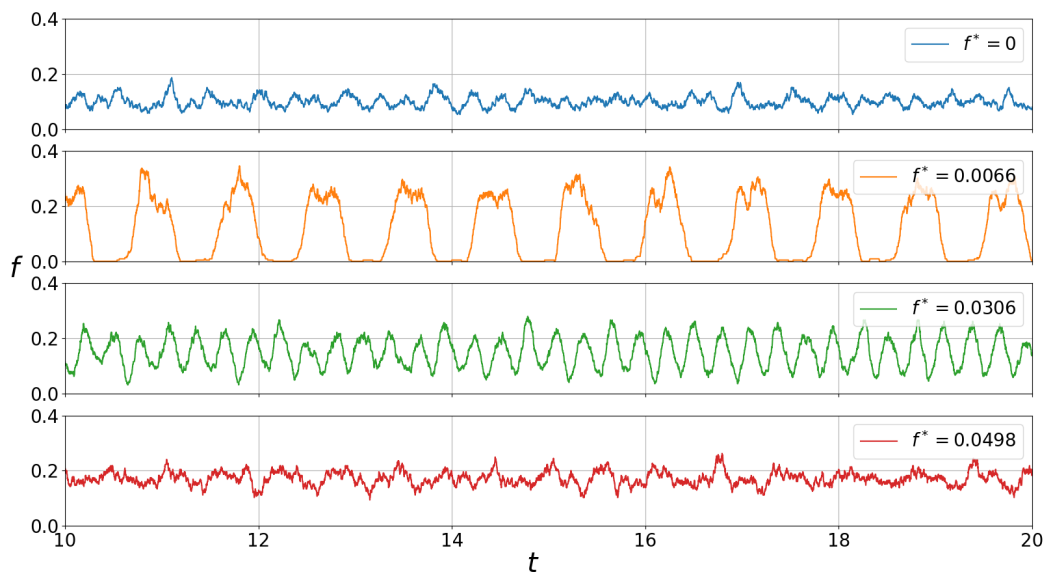
Az összehasonlítás végett az ezeket az ábrákat a 1.2-es ábrához hasonló alakban készítettem el.



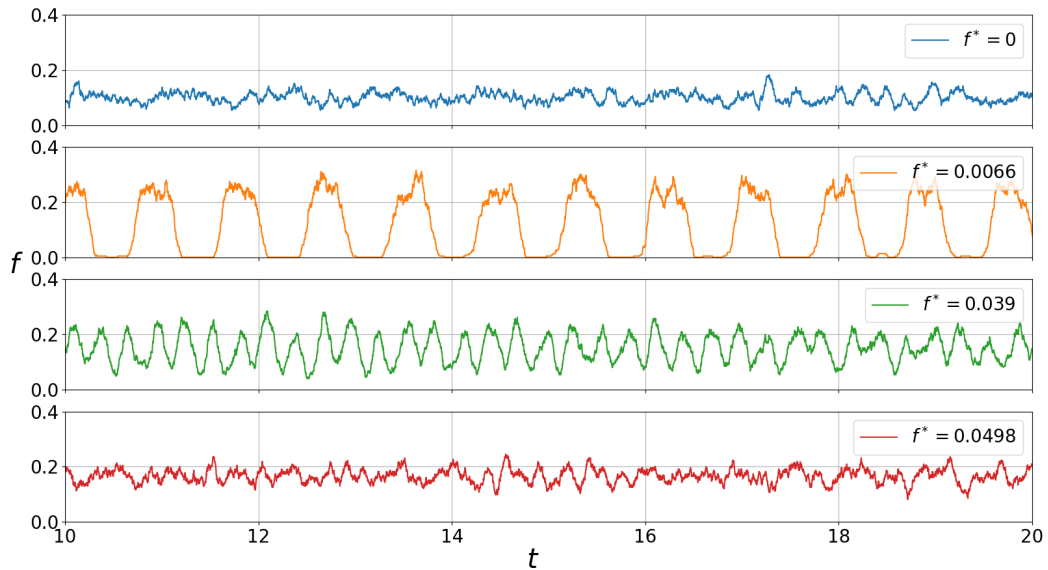
4.7. ábra. A rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) függvényében, különböző küszöbparaméter értékekre $f^* \in \{0, 0.0018, 0.0132, 0.0246\}$ ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$, $\mathbf{R} = 2.5$)



4.8. ábra. A rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) függvényében, különböző küszöbparaméter értékekre $f^* \in \{0, 0.0072, 0.021, 0.03\}$ ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$, $\mathbf{R} = \mathbf{3}$)



4.9. ábra. A rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) függvényében, különböző küszöbparaméter értékekre $f^* \in \{0, 0.0066, 0.0306, 0.0498\}$ ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$, $\mathbf{R} = \mathbf{3.5}$)



4.10. ábra. A rendszer által kibocsátott össz intenzitás (f) az idő (t) függvényében, különböző küszöbparaméter értékekre $f^* \in \{0, 0.007, 0.039, 0.05\}$ ($\tau^* = 0.1$, $\tau_{B_I} = 0.4$, $\tau_{B_{II}} = 0.8$, $\tau_C = 0.1$, $N = 225$, $dt = 10^{-3}$, $\mathbf{R} = \mathbf{4}$)

Az utóbbi négy ábrát (4.7-4.10) összehasonlítva az 1.2-es ábrával megállapíthatjuk, hogy a véletlenbolyongó, lokálisan csatolt kétmódusú oszcillátorokból álló rendszerben hasonlóan alakul ki a szinkronizáció, mint a globálisan csatolt, térben stacionárius rendszer esetén.

A 4.7-4.10 ábrák felső részén késsel látható az I-es tartománybeli viselkedés, ami egy szinkronizálatlan állapot. Az lokális pulzuserősség minden oszcillátor esetén, minden pillanatban a küszöbérték fölött van ezért az összes oszcillátor a II-es módban üzemel.

Ez alatt sárgával ábrázoltuk a II-es tartománybeli viselkedést, amikor a szinkronizáció a hosszab periódusra alakul ki.

A III-as tartománybeli viselkedés szintén egy szinkronizáció, melynek a periódusa megközelítőleg egyenlő az I-es módban való üzemelés periódusával. Ezt zöld görbével ábrázoltuk.

Az ábrák legalján vörös görbeként látható a IV. tartománybeli szinkronizálatlan viselkedés. A lokális pulzuserősség mindig a küszöbérték alatt van, ezért az összes oszcillátor az I-es módban üzemel és fennmarad a kezdeti állapotból adódó rendezetlenség.

4.3. Kísérlet

Megpróbáltuk kísérleti úton is igazolni a szimulációk alapján tett megfigyelést. A kísérlethez 12 darab **Edison V2.0** robotot használtunk.

Az **Edison V2.0** egy kétkerekű robot, amely képes helyváltoztatásra, akdály érzékelésre, hangkibocsájtásra és érzékelésre. Két darab vezérelhető piros LED-del és szintén 2 darab fényérzékelő szenzorral van ellátva. Többek között Python-ban is programozható, viszont hiányossága, hogy csak egyirányú kommunikációra képes a számítógéppel.

A kísérlet során a robotokat egy téglalap alakú keretbe zárjuk, amin belül bolyonghatnak. A bolyongás egy lépése egy véletlenszerű $\alpha \in [0, 2\pi)$ szögelfordulásból és egy l előrehaladásból áll. Amennyiben a robot akadályt érzékel maga előtt a lépés összetétele megváltozik, ezáltal a lépés során egy l távolságot halad hátrafelé majd elfordul α szöggel.

Ahhoz, hogy a robotok egyszerre indíthatók legyenek, az őket vezérlő program egy várakozási ciklussal kezdődik, amelyből csak akkor lépnek ki, ha az általuk mért fényerő egy bizonyos érték alá csökkent, azaz akkor, ha lekapcsoljuk a lámpát a szobában. Ezt követi egy véletlenszerű várakozási idő, amely a véletlenszerű kezdeti állapotot helyettesíti. A várakozás lejártával kezdődik a második ciklus, amely a kétmódusú oszcillátorokat jellemzi.

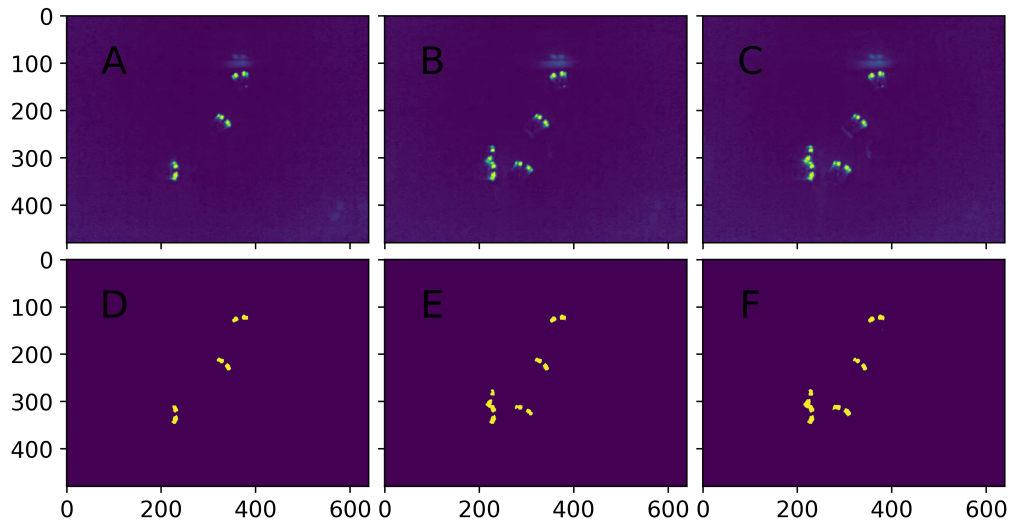
A ciklus a τ_A sztochasztikus várakozási idővel kezdődik, amely exponenciális eloszlás szerint lett generálva egy $\tau^* = 500 \text{ ms}$ -os átlagértékkel. Az **Edison V2.0** robotok nem képesek véletlenszám generálásra, ezért τ_A és α értékeit programozáskor kell manuálisan megadni. Ezt úgy oldottuk meg, hogy írtunk egy Python programot, amely segítségével generálni tudtunk tetszőleges számú, csupán a változók értékeiben különböző EdPy programot és ezeket töltöttem fel a robotokra.

Ezt követően a robot leméri a fényerőt mindkét érzékelőjével (I_1 és I_2) és átlagolja az értékeket: $I = \frac{I_1 + I_2}{2}$. Ha I kisebb az I^* küszöbparaméternél akkor a robot $\tau_{B_I} = 2000 \text{ ms}$ -ot várakozik, ellenkező esetben $\tau_{B_{II}} = 4000 \text{ ms}$ -ot. Ez idő alatt mozdul el a térben a robot. A B szakasz után következik a $\tau_C = 500 \text{ ms}$ időtartamú jelkibocsájtás amikor a robot felkapcsolja a LED-jeit. A τ_C idő lejártával a LED-ek leoltódnak és a ciklus kezdődik előről.

Azért tekinthetem ezeket a robotokat lokálisan csatolt kétmódusú oszcillátoroknak, mert csak kis térszög alatt beeső fényt képesek érzékelni, tehát nem kapnak információt a rendszer minden tagjáról.

A robotok dinamikáját egy kamerával, felülnézetből rögzítjük és a felvétel képkockáit egy másik Python program segítségével feldolgozzuk. A képkockákat *grayscale*-be alakítjuk, majd a 100-nál kisebb értékű képpontokat 0-ra, a többit pedig 1-re állítjuk. Az így kapott képkockák képpontjainak értékét összegezzük és így kapjuk meg a g mennyiséget, ami arányos a rendszer össz pulzuserősségével: $g \propto f$

A videó minden képkockája megfelel egy időpillanatnak és ki tudunk rá számolni egy g -t, tehát

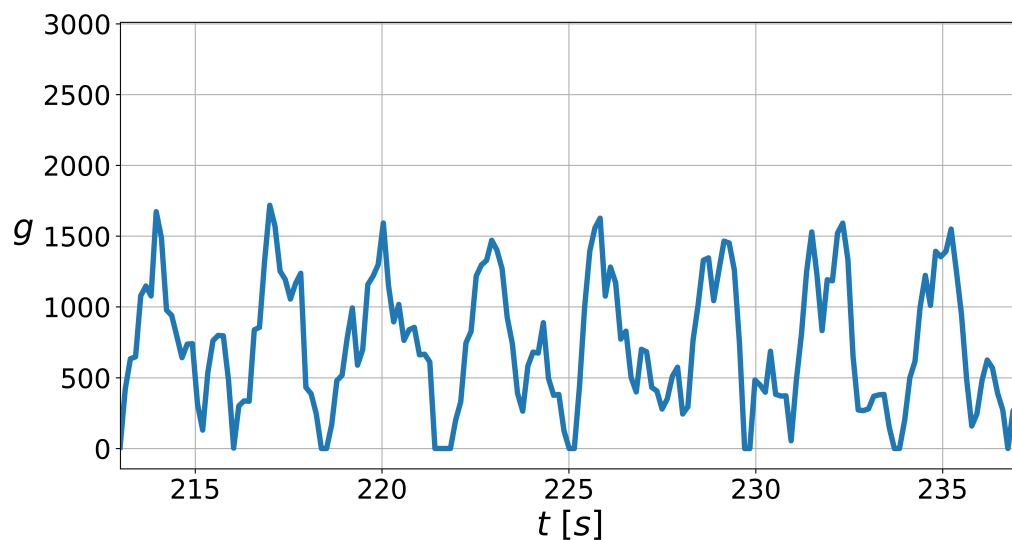


4.11. ábra. Felül: 3 egymás utáni képkocka egy a kísérletről készült felvételtől; Alul: ugyanaz a három képkocka, miután elvégeztem rajtuk a fent leírt műveleteket

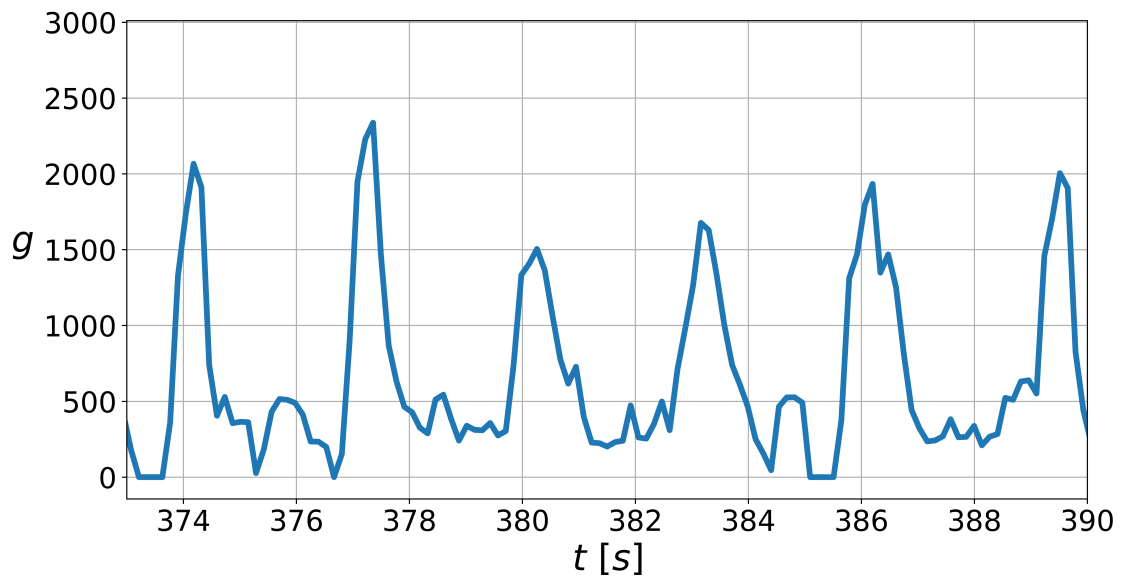
ábrázolhatjuk g változását az idő függvényében.

A fent leírt módszerrel végeztük a kísérletet, az I^* paramétert pedig a próbálkozás módszerével állítottuk különböző értékekre. A kísérletileg mért $g(t)$ görbét Fourier-transzformáltuk, hogy könnyebben felismerjük a szinkronizációt.

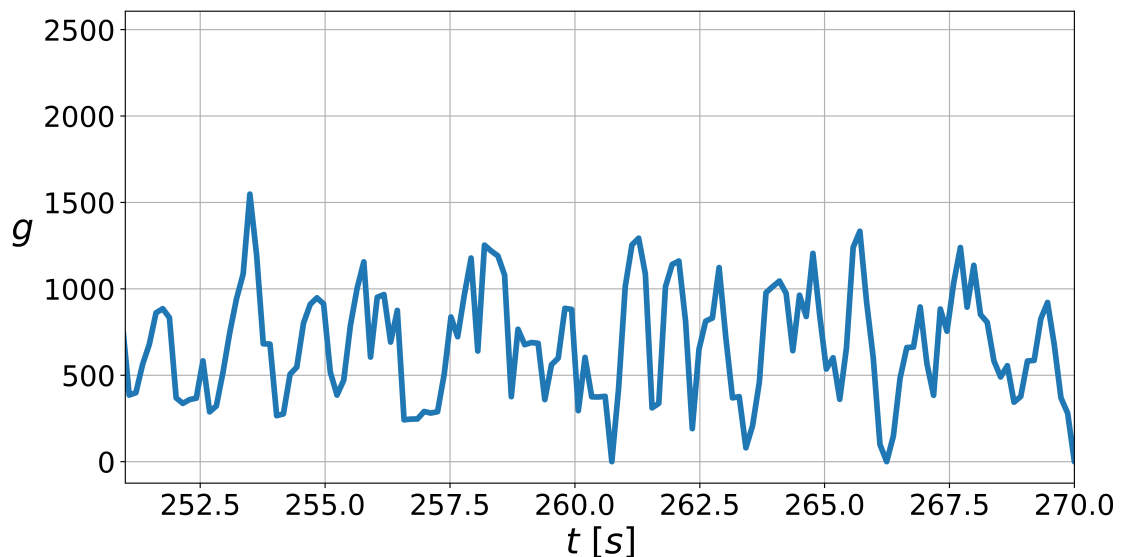
A 4.11-es ábrán az **A, B** és **C** három egymás utáni képkockája az $I^* = 5$ paraméterrel végzett kísérletről készült felvételnek. A **D, E** és **F** ugyanezeket a képkockákat ábrázolják, miután a 100 alatti értékkel rendelkező képpontokat 0-ra, a többit pedig 1-re állítottuk. Megfigyelhető, hogy ezzel a módszerrel hatékonyan kiszűrtük a falakról visszaverődő fényt, és a háttér egyenetlenségét amely plusz zajt adna a mérésnek.



4.12. ábra. A rendszer össz pulzuserősségével arányos g az idő függvényében a $[213, 237]$ s intervallumon.



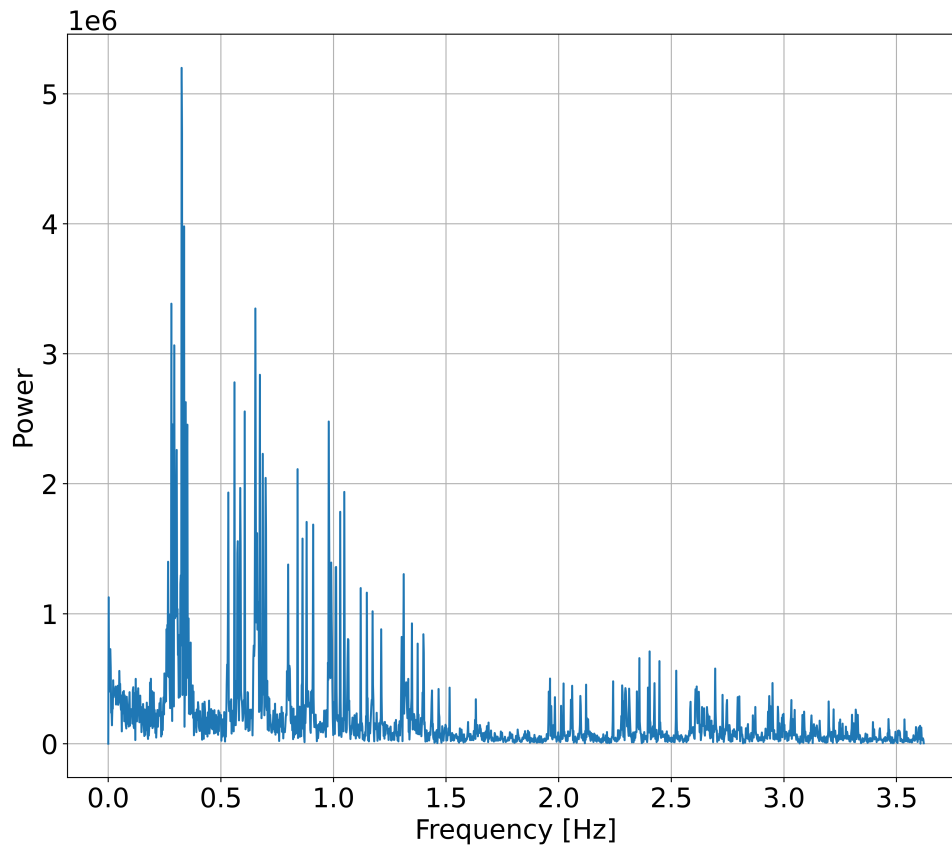
4.13. ábra. A rendszer össz pulzuserősségével arányos g az idő függvényében a $[373, 390]$ s intervallumon.



4.14. ábra. A rendszer össz pulzuserősségével arányos g az idő függvényében a $[251, 270]$ s intervallumon.

A 4.12-es és 4.13-as ábra az $I^* = 7$ paraméterrel végzett kísérlet g mennyiségének az időfüggését mutatja meg két különböző időintervallumban. Ebben az esetben felismerhető egy periodikus jelleg, viszont a más I^* értékekre végzett kísérletek a 4.14-es ábrán láthatóhoz hasonló szinkronizálatlan viselkedést mutattak.

$I^* = 7$ esetén a $g(t)$ Fourier-transzformáltján egy jelentős maximumot figyeltünk meg (4.15 ábra) $\nu = 0.3255 \text{ Hz}$ -nél, ami egy $T = 3.0722 \text{ s}$ -os periódusnak felel meg, és ez megközelítőleg egyenlő az I-es módusban való üzemelés átlagos periódusával: $T \approx \langle T_I \rangle$. Ez azt jelenti, hogy a rendszer a II. tartományban van és az össz pulzuserősség kvázi-periódikus.



4.15. ábra. $g(t)$ Fourier-transzformáltja $I^* = 7$ esetén.

Ily módon sikerült kísérletileg is megmutatni, hogy lokálisan csatolt, véletlen bolyongást végző kétmódusú oszcillátorok képesek szinkronizációra. A vizsgált esetben a szinkronizált villogás periódusideje a gyors fázis periódusidejének felelt meg. Meg kell jegyeznünk, hogy tekintettel arra, hogy a robotokat egyesével kell programozni minden egyes kísérlet elvégzése előtt, nem sikerült a teljes paraméterteret feltérképezni és nem sikerült olyan paramétertartományt kimutatni, ahol a szinkronizált villogás periódusideje a lassú fázisnak felelne meg.

Következtetés

Szakedolgozatom célkitűzése az volt, hogy megvizsgáljuk, létrejöhet-e a globálisan csatolt kétmódusú sztochasztikus oszcillátorok között kialakuló szinkronizációhoz hasonló viselkedés egy olyan rendszerben, ahol az oszcillátorok közötti csatolás lokális és véletlen bolyongást végeznek egy kétdimenziós rácson.

A problémát számítógépes szimuláció és gyakorlati kísérlet segítségével is egyaránt vizsgáltuk. A két módszer eredményei egybevágnak, miszerint a véletlen bolyongást végző, lokálisan csatolt kétmódusú sztochasztikus oszcillátorok rendszerében is kialakul a szinkronizáció. A szimulációs módszer azt mutatta meg, hogy az ilyen rendszerek esetén is megkülönböztethető négy, az 1.4-es alfejezetben bemutatottakhoz hasonló, tartomány.

Tekintettel a használt robotok átprogramozásának időigényes voltára, kísérlettel nem sikerült mind a négy tartományból való viselkedést előidézni, viszont a kétféle szinkronizáció egyikét sikerült elérni a robotok között. A hiányosságokat még okozhatta a mérés zajossága és az, hogy a robotok nem voltak teljesen alkalmasak a lokális csatolás képviselésére. A fal felé forult robotok nem kaptak információt egyetlen másik robot állapotáról sem ($R \ll 1$). Az előbbi akadály áthidalható, ha a méréseket nem videófeldolgozással végezzük, hanem valós időben kommunikálunk a robotokkal. Az utóbbi akadály pedig csökkenthető azzal hogy, minél több szimmetriasíkú robotokkal dolgozunk, amelyek több fényérzékelő szenzorral is rendelkeznek.

Természetesen a szimulációk is továbbgondolhatók, például a Heaviside függvény helyett mondjuk egy exponenciális- vagy hatványfüggvénnyel adhatjuk meg az egyes oszcillátorok hozzájárulását a lokálisan mért pulzuserősségbe. Továbbá, a véletlen bolyongást is helyettesíthetjük valamely, a kollektív mozgásoknál használt mozgástípussal, és így kétmódusú oszcillátorokból összeállított swarmalator rendszer vizsgálatára is lehetőség nyílik.

Irodalomjegyzék

- [1] Heylighen Francis, *The science of self-organization and adaptivity*, Encyclopedia of Life Support Systems, **5.3**, 253-280, 2001.
- [2] J. Buck, *Synchronous rhythmic flashing of fireflies II*, The Quarterly Review of Biology, **63**, 265-289, 1988.
- [3] Aihara Ikkyu et al., *Mathematical modelling and application of frog choruses as an autonomous distributed communication system*, Royal Society open science, **6.1**, 2019.
- [4] T. J. Walker, *Acoustic synchrony: two mechanisms in the snowy tree cricket*, Science, **166**, 891-894, 1969.
- [5] Alexander Nikitin, Zoltán Néda, Tamas Vicsek, *Collective Dynamics of Two-Mode Stochastic Oscillators*, Physical Review Letters, **87**, 2001.
- [6] McClintock Martha K., *Menstrual synchrony and suppression*, Nature, **229**, 244-245, 1971.
- [7] Emlen John T., *Flocking behavior in birds*, The Auk, **69.2**, 160-170, 1952.
- [8] Bhattacharya Kunal, Tamás Vicsek, *Collective decision making in cohesive flocks*, New Journal of Physics, **12.9**, 2010.
- [9] Dublon Ian A.N., David J.T. Sumpter, *Flying insect swarms*, Current Biology, **24.18**, R828-R830, 2014.
- [10] Weihs D., *Hydromechanics of fish schooling*, Nature, **241.5387**, 290-291, 1973.
- [11] Kevin P. O’Keeffe, Hyunsuk Hong, Steven H. Strogatz, *Oscillators that sync and swarm*, Nature Communications, **8**, 1504, 2017.
- [12] Tamás Vicsek, Anna Zafeiris, *Collective motion*, Physics Reports, **517**, 71-140, 2012.
- [13] Huygens Christiaan, *Horologium oscillatorium*, 1980.

- [14] John William Strutt Baron Rayleigh, *The theory of sound*, Cambridge University Press, Macmillan, 1894.
- [15] Eccles William Henry, J. H. Vincent, *On the variations of wave-length of the oscillations generated by three-electrode thermionic tubes due to changes in filament current, plate voltage, grid voltage, or coupling*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, **96.680**, 455-465, 1920.
- [16] Philip J. Holmes, David A. Rand., *Bifurcations of the forced van der Pol oscillator*, Quarterly of Applied Mathematics, **35.4**, 495-509, 1978.
- [17] Rong-Chi Huang, *The discoveries of molecular mechanisms for the circadian rhythm: The 2017 Nobel Prize in Physiology or Medicine*, Biomedical journal, **41.1**, 5-8, 2018.
- [18] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, Jürgen Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, New York, 2001.
- [19] Philip Laurent, *The supposed synchronal flashing of fireflies*, Science, **45.1150**, 44-44, 1917.
- [20] John Buck, Elisabeth Buck, *Biology of synchronous flashing of fireflies*, 562-564, 1966.
- [21] Steven H. Strogatz, *Sync: How Order Emerges from Chaos In the Universe, Nature, and Daily Life*, New York, New York, 2003.
- [22] Arthur T. Winfree, *Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators*, Journal of theoretical biology, **16.1**, 15-42, 1967.
- [23] Steven H. Strogatz, *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators* Physica D, **143**, 1-20, 2000.
- [24] X.J. Wang, *Multiple dynamical modes of thalamic relay neurons: rhythmic bursting and intermittent phase-locking*, Neuroscience, **59**, 21-31, 1994
- [25] Daniel L. Blair, T. Neicu, A. Kudrolli, *Vortices in vibrated granular rods*, Physical Review E, **67**, 2003.
- [26] Tamás Vicsek, *A question of scale*, Nature, **411**, 421, 2001.
- [27] Evelyn F. Keller, Lee A. Segel, *Model for Chemotaxis*, Journal of Theoretical Biology, **30**, 225-234, 1971.

- [28] James A. Shapiro, *Bacteria as multicellular organisms*, Scientific American, **258.6**, 82-89, 1988.
- [29] Hugo Wioland, Enkeleida Lushi, Raymond E. Goldstein, *Directed collective motion of bacteria under channel confinement*, New Journal of Physics, **18.7**, 2016.
- [30] Yilin Wu, *Collective motion of bacteria in two dimensions*, Quantitative Biology, **3**, 199-205, 2015.
- [31] Wayne K. Potts, *The chorus-line hypothesis of manoeuvre coordination in avian flocks*, Nature, **309**, 344–345, 1984.
- [32] M. Ballerini, N. Cabibbo, R. Candelier, A. Cavagna, E. Cisbani, I. Giardina, V. Lecomte, A. Orlandi, G. Parisi, A. Procaccini, M. Viale, V. Zdravkovic, *Interaction Ruling Animal Collective Behaviour Depends on Topological rather than Metric Distance: Evidence from a Field Study*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **105**, 1232-1237, 2008.
- [33] Gaia Dell’Ariccia et al., *Flock flying improves pigeons’ homing: GPS track analysis of individual flyers versus small groups*, Animal Behaviour, **76.4**, 1165-1172, 2008.
- [34] Nagy Máté, Ákos Zsuzsa, Biro Dora, Vicsek Tamás, *Hierarchical group dynamics in pigeon flocks*, Nature, **464.7290**, 890-893, 2010.
- [35] Oleg A. Igoshin, Alex Mogilner, Roy D. Welch, *Pattern formation and traveling waves in myxobacteria: theory and modeling*, Proceedings of the National Academy of Sciences, **98.26**, 14913-14918, 2001.
- [36] J. Klafter, I.M. Sokolov, *First steps in random walks: from tools to applications*, Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [37] Révész Pál, *Random walk in random and non-random environments*, World Scientific, Singapore, 2013.