



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI  
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM  
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÄT  
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ  
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1  
Cluj-Napoca, RO-400084  
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906  
secretariat.phys@ubbcluj.ro  
www.phys.ubbcluj.ro



UNIVERSITATEA "BABEȘ-BOLYAI" CLUJ NAPOCA  
FACULTATEA DE FIZICĂ  
SPECIALIZAREA FIZICĂ

## LUCRARE DE LICENȚĂ

**Coordonator științific**

Prof. Dr. Néda Zoltán

**Absolvent**

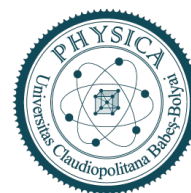
Bănică-Solymosi Írisz

2022



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI  
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM  
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÄT  
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ  
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1  
Cluj-Napoca, RO-400084  
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906  
secretariat.phys@ubbcluj.ro  
www.phys.ubbcluj.ro



UNIVERSITATEA "BABEȘ-BOLYAI" CLUJ NAPOCA  
FACULTATEA DE FIZICĂ  
SPECIALIZAREA FIZICĂ

**LUCRARE DE LICENȚĂ**  
**COEFICIENTUL GINI PENTRU STĂRILE STAȚIONARE**  
**AL UNUI MODEL EVOLUȚIONAR**

**Coordonator științific**

Prof. Dr. Néda Zoltán

**Absolvent**

Bănică-Solymosi Írisz

2022



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI  
BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM  
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITÄT  
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY

FACULTATEA DE FIZICĂ  
Str. Mihail Kogălniceanu nr.1  
Cluj-Napoca, RO-400084  
Tel: +4(0)264-405300 | FAX: +4(0)264-591906  
secretariat.phys@ubbcluj.ro  
www.phys.ubbcluj.ro



BABEȘ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR  
FIZIKA KAR  
FIZIKA SZAK

**ÁLLAMVIZSGA DOLGOZAT**  
**GINI-INDEX EGY EVOLÚCIÓS MODELL**  
**STACIONÁRIUS ÁLLAPOTAIRA**

**Témavezető tanár**

Prof. Dr. Néda Zoltán

**Hallgató**

Bănică-Solymosi Írisz

2022

# Tartalomjegyzék

Bevezető . . . . .	1
1. Evolúciós egyenlet . . . . .	2
1.1. Diszkrét eset . . . . .	2
1.2. Folytonos eset . . . . .	3
2. Stacionárius eloszlások . . . . .	4
2.1. Diszkrét eset . . . . .	4
2.2. Folytonos eset . . . . .	4
2.2.1. Exponenciális eloszlás . . . . .	5
2.2.2. Tsallis–Pareto eloszlás . . . . .	5
2.2.3. Normál eloszlás . . . . .	6
2.2.4. További esetek . . . . .	7
3. Gini-index . . . . .	9
3.1. Gini-index exponenciális eloszlásra . . . . .	9
3.2. Gini-index a Tsallis–Pareto eloszlásra . . . . .	10
3.3. Gini-index a normál eloszlás esetén . . . . .	10
3.4. További esetek . . . . .	11
4. Véges méret effektusok . . . . .	13
4.1. Exponenciális eloszlás esete . . . . .	13
4.2. Tsallis–Pareto eloszlás esete . . . . .	14
4.3. Normál eloszlás esete . . . . .	18
5. Több exponenciális eloszlás összetevése . . . . .	21
Következtetések . . . . .	23
I. Függelék . . . . .	25
a. Gini-index kiszámítása exponenciális eloszlásra . . . . .	25
b. Gini-index kiszámítása Tsallis–Pareto eloszlásra . . . . .	26
c. Gini-index kiszámítása normál eloszlásra . . . . .	28
d. Gini-index a további esetekre . . . . .	30

## Abstract

Master equations are widely used in describing complex systems which contain stochastic processes. In this thesis we consider such a process with unidirectional local growth and general resetting rates, both for the discrete and continuous state. The stationary distribution of these models are studied for simple growth- and reset-rates. For constant and linear form of the growth and reset rates the analytical form of the stationary probability density function is computed. Among others, some known distributions are observed: exponential, normal, and Tsallis–Pareto type distribution. Our main aim was to compute the characteristic inequality measures that are obtained for the considered growth and reset rates, by calculating the Gini index. We determine the values of the Gini index through analytical calculations, and arrive to the conclusion that these values are situated in separate domains of the  $[0,1]$  interval. Our analytical calculations for the Gini index are done for the stationary distributions of the continuous dynamics, corresponding to infinitely large system size. Finite size effects for the Gini index are also investigated by computer simulations, generating ensembles of data following the characteristic stationary distributions. As a result, we observed important finite-size effects for low population sizes, and offered a simple methodology to correct these. Finally, we briefly examine the case of multiple exponential distributions, packed into one large set. We determine the Gini index for this set and study its relation to the  $1/2$  value characteristic for the exponential distribution. Our results can have sociological and economic application in controlling the relevant inequalities in these complex systems. By relating the observed socio-economic inequalities to the proposed evolution equation, one can investigate the influence of the relevant growth and reset rates on the observed inequality measures.

## Bevezető

Az evolúciós vagy más néven "mester egyenletek" széleskörűen alkalmazhatók stochasztikus folyamatokat tartalmazó komplex jelenségek dinamikájának és egyensúlyi tulajdonságainak a megértésére [1]. A dolgozat keretében egy analitikusan kezelhető mester egyenlet stacionárius állapotában levő egyenlőtlenségek mértékét fogjuk megvizsgálni a Gini-indexen keresztül.

A dolgozat indításaként ismertetjük az evolúciós egyenlet alakját diszkrét és folytonos esetben is, illetve bevezetjük a folyamatban megjelenő átmeneti rátákat. Ezután kiszámítjuk a stacionárius esetre a valószínűség-sűrűséget (diszkrét és folytonos változat) különböző, egyszerű átmeneti rátákat tekintve. Így eljutunk például az exponenciális, Tsallis–Pareto vagy a normál eloszlásokhoz. Ezekre az eloszlásokra analitikus számításokon keresztül, meghatározzuk a Gini-index értékét, amelyek a  $[0,1]$  intervallum jól elkülöníthető tartományába esnek.

Az analitikus számítások mellett numerikus kísérletet is végzünk, hogy az említett eloszlásokra véges nagyságú sokaságokban is meghatározzuk a Gini-index értékét. Ezen értékek és az analitikus esetben kiszámolt Gini-index értékek közti különbség abszolút értékét vizsgálva véges méret effektusokat figyelhetünk meg. A jelenség kiküszöbölésére a szakirodalomban is javasolt ([2]) megoldást tekintjük. Végezetül vizsgáljuk több exponenciális eloszlás összetevése esetében a Gini-indexet, hogyan változik ennek az értéke az exponenciális eloszlásra jellemző  $1/2$ -es értékhez viszonyítva.

# 1. Evolúciós egyenlet

Tekintsünk egy Markov folyamatot, melyben egy állapot jövőbeli kimenete csak az aktuális pillanattól függ. Az állapotváltozót jelöljük  $n$ -el ( $n \in \mathbb{N}$ ) (folytonos esetben  $x$ ), és az fog érdekelni minket, hogy mi annak a valószínűsége, hogy az " $n$ " állapotban legyünk [1].

A dolgozatban olyan esetet vizsgálunk majd, amelyben a változó egyirányban növekedhet adott rátával, és ehhez még hozzáadunk egy reszetálási rátát, amely az állapotot visszaviheti adott valószínűséggel a kezdeti, 0 állapotba. Egy ilyen folyamat során létezhet egy egyensúlyi eloszlás, amelyben a megengedett állapotok valószínűségei időtől függetlenek lesznek [1].

A folyamat dinamikáját az evolúciós egyenlet írja le, amelyekre külön fogjuk tárgyalni a diszkrét és a folytonos állapotváltozók esetét.

## 1.1. Diszkrét eset

Jelöljük  $P_m$ -el annak a valószínűségét, hogy a rendszer az  $m$  állapotban van, illetve az  $m$  állapotból az  $n$  állapotba való átmenet esetében a valószínűséghez tartozó együtthatót  $w_{nm}$ -el. Ezek az együtthatók adják meg az átmenetek rátáját, egységnyi időre vonatkoztatott valószínűségét. Az evolúciós (mester) egyenletek általános alakja a következőképpen írható [1]:

$$\dot{P}_n = \sum_m [w_{nm}P_m - w_{mn}P_n] \quad (1)$$

Mivel a rendszerre a valószínűségek összege normált:  $\sum_n P_n = 1$ , így  $\frac{d}{dt} \sum_n P_n = \sum_n \dot{P}_n = 0$ . Ezt pedig biztosítja az evolúciós egyenlet asszimmetrikus formája [1].

Egy ismert példa a driftmozgásos diffúzió, amelyet egy lokális átmeneteket tartalmazó mester egyenlet ír le. Ebben az esetben az  $n$  lehet kisebb és nagyobb is, mint  $m$  de csak egy egységgel. Ez esetben az átmeneti ráta és az evolúciós egyenlet [1]:

$$w_{nm} = \mu_m \delta_{n,m+1} + \lambda_m \delta_{n,m-1} \quad (2)$$

$$\dot{P}_n = \mu_{n-1}P_{n-1} + \lambda_{n+1}P_{n+1} - (\mu_n + \lambda_n)P_n \quad (3)$$

A dolgozatban azonban olyan eseteket szeretnénk tárgyalni, amelyekben az átmenetek az elemi állapotok között egyirányúak, egységenként növekedhetnek és ezáltal lokálisak. Ennek a növekedésnek a rátáját fogja megadni a  $\mu$ , ami állapotfüggő is lehet ( $\mu_n$ ). Ezt kiegészítjük egy olyan átmenettel, amely bármely állapotot reszetálhat, visszavihet az alapállapotba ( $n = 0$ ). Ezt jelöljük  $\gamma$ -val, ami szintén állapotfüggő lehet ( $\gamma_n$ ). Az átmeneti ráták felírhatók mint [1]:

$$w_{nm} = \mu_m \delta_{n,m+1} + \gamma_m \delta_{n,0} \quad (4)$$

Ezeket az együtthatókat felhasználva az evolúciós egyenlet a következőképpen alakul [1]:

$$\dot{P}_n = \mu_{n-1}P_{n-1} + \delta_{n,0}\langle\gamma\rangle - (\mu_n + \gamma_n)P_n, \quad (5)$$

ahol  $\langle\gamma\rangle = \sum_j \gamma_j P_j$ ,  $n \geq 0$ , biztosítja a valószínűség normáltságának a megmaradását.

## 1.2. Folytonos eset

Folytonos esetben a valószínűség-sűrűségfüggvényre lesz szükségünk:  $P(n\Delta x, t) = P_n/\Delta x$ . A normálási feltétel:  $\sum_n P_n \rightarrow \int P(x, t) dx = 1$ . A diszkrét esetben említett lokális diffúzióra az evolúciós egyenletet a (3) egyenlet adta meg, amelynek a folytonos esetbeli megfelelője [1]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(vP) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(DP), \quad (6)$$

ahol  $v(n\Delta x) = (\lambda_n - \mu_n)\Delta x$  a drift együttható,  $D(n\Delta x) = (\lambda_n + \mu_n)\Delta x^2/2$  a diffúziós együttható. Ez az egyenlet a stochasztikus diffúziót leíró Langevin egyenletnek megfelelő Fokker–Planck egyenlet néven ismert [1]. A Fokker–Planck egyenlet azonban nem tartalmazza a reszetálási átmenetet, amelyet a dolgozatban célunk tárgyalni. Az (5) egyenlet adja meg diszkrét változókra a dolgozatban tekintett folyamatot, amelynek folytonos megfelelője [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (\mu(x)P(x, t)) - \gamma(x)P(x, t) \quad (7)$$



## 2. Stacionárius eloszlások

Stacionárius esetben az eloszlás időben állandó, tehát az idő szerinti derivált 0 lesz. Vizsgáljuk meg diszkrét és folytonos változók esetében az evolúciós egyenlethez tartozó stacionárius eloszlást.

### 2.1. Diszkrét eset

Mivel a stacionárius esetet tekintjük, így  $\dot{P}_n = 0$ . Jelöljük ebben az esetben az eloszlásfüggvényt  $Q_n$ -el. Ekkor [1]:

$$0 = \sum_m [w_{nm}Q_m - w_{mn}Q_n] \quad (8)$$

Lokális növekedés és reszetálási folyamatok esetén a következő rekurziós képlethez jutunk  $\forall n > 0$ -ra [1]:

$$\mu_{n-1}Q_{n-1} = (\mu_n + \gamma_n)Q_n \quad (9)$$

Az  $n = 0$ -ra a  $Q_0$  meghatározható a normálási feltételből:  $\sum_n Q_n = 1$ , vagy az evolúciós egyenlethez ( $n = 0$ -ra):  $0 = \sum_j \gamma_j Q_j - (\mu_0 + \gamma_0)Q_0$  [1].

A stacionárius megoldás alakja [1]:

$$Q_n = \frac{\mu_0 Q_0}{\mu_n} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{\gamma_j}{\mu_j}\right)^{-1} \quad (10)$$

### 2.2. Folytonos eset

Folytonos állapottér esetében  $n \rightarrow \infty$ , azonban tartjuk végesnek az  $x = n\Delta x$ -t. Ekkor a stacionárius esetre jellemző sűrűségfüggvény könnyebben meghatározható, mint a diszkrét esetben. Az egyirányú növekedési és reszetálási modellben, melyet a dolgozatban tanulmányozunk a folytonos átmeneti rátákat a következőképpen értelmezzük [1]:

$$\mu(x) \equiv \mu(n \cdot \Delta x) = \mu_n \Delta x \quad (11)$$

$$\gamma(x) \equiv \gamma(n \cdot \Delta x) = \gamma_n \quad (12)$$

Az evolúciós egyenletet ekkor a (7) egyenlet adja meg [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (\mu(x)P(x, t)) - \gamma(x)P(x, t)$$

Stacionárius esetet tekintve:  $\frac{\partial}{\partial t} P = 0$ , a valószínűség-sűrűségfüggvény meghatározható [1]:

$$Q(x) = \frac{\mu(0)Q(0)}{\mu(x)} e^{-\int_0^x \frac{\gamma(u)}{\mu(u)} du} \quad (13)$$

Tekintsünk a továbbiakban néhány egyszerű, és a komplex rendszerekre elterjedten jellemző növekedési és reszetálási rátákat. Tekintsük azon eseteket, mikor ezek vagy konstansak (állapottól függetlenek), vagy preferenciálisak, lineáris preferencialitást feltételezve. Ezen utóbbi eset matematikailag azt jelenti, hogy lineárisan függnek az állapotot jellemző paramétertől. Gondolkodhatunk itt egy olyan szociális rendszerben, amelyben a vagyon vagy a jövedelem növekedése vagy állapottól független, vagy lineárisan változik az adott vagyon/jövedelem nagyságával. Hasonlóan a reszetálás esetére is, ami a rendszerből való kikerülést, esetleg visszakerülést jellemzi.

### 2.2.1. Exponenciális eloszlás

Tekintsük először azt az esetet, amikor mindkét rátának konstans az értéke. Adott tehát egy  $\gamma(x) = \gamma$  állapottól független reszetálási és egy  $\mu(x) = \mu$  konstans növekedési ráta [1]. Ebben az esetben a stacionárius sűrűségfüggvényt a következőképpen kapjuk:

$$\gamma(x) = \gamma \quad (14)$$

$$\mu(x) = \mu \Rightarrow \mu(0) = \mu \quad (15)$$

$$\int_0^x \frac{\gamma(u)}{\mu(u)} du = \int_0^x \frac{\gamma}{\mu} du = \frac{\gamma}{\mu} \cdot u \Big|_0^x = \frac{\gamma}{\mu} x \quad (16)$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{\mu(0)Q(0)}{\mu(x)} e^{-\int_0^x \frac{\gamma(u)}{\mu(u)} du} = \frac{\mu Q(0)}{\mu} e^{-\frac{\gamma}{\mu} x} = Q(0) e^{-\frac{\gamma}{\mu} x} \quad (17)$$

A normálási feltételből,  $\int_0^\infty Q(x) dx = 1$ , meghatározzuk  $Q(0)$ -t.

$$\int_0^\infty Q(x) dx = 1$$

$$\int_0^\infty Q(0) e^{-\frac{\gamma}{\mu} x} dx = Q(0) e^{-\frac{\gamma}{\mu} x} \cdot \left( -\frac{\mu}{\gamma} \right) \Big|_0^\infty = -Q(0) \cdot \frac{\mu}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{\mu} \cdot \infty} + Q(0) \cdot \frac{\mu}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{\mu} \cdot 0} = Q(0) \cdot \frac{\mu}{\gamma} = 1$$

$$\Rightarrow Q(0) = \frac{\gamma}{\mu} \quad (18)$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{\gamma}{\mu} e^{-\frac{\gamma}{\mu} x} \quad (19)$$

Ebben az esetben a stacionárius állapotot a jólismert exponenciális eloszlás jellemzi. Ezt az eloszlást átskálázva, és felhasználva az  $\langle x \rangle$  eloszlás átlagát a következő alakot kapjuk:

$$Q(y) = \frac{\gamma}{\mu} e^{-y}, \quad (20)$$

ahol  $y = \frac{x}{\langle x \rangle}$ ,  $\langle x \rangle = \frac{\mu}{\gamma}$  (az átlagértékre a számítás a Függelék I a-részében található).

### 2.2.2. Tsallis–Pareto eloszlás

Tekintsük most a reszetálási rátát konstansnak,  $\gamma(x) = \gamma$ , viszont legyen a növekedési ráta lineárisan növekvő. Ahhoz, hogy az  $x = 0$  folyamatról a növekedés lehetővé váljon szükséges

a lineáris mellett egy konstans tag is [1]. A rátákat válasszuk meg tehát a következőképpen:

$$\gamma(x) = \gamma \quad (21)$$

$$\mu(x) = \sigma(x+b) \Rightarrow \mu(0) = \sigma b \quad (22)$$

Ezen esetben:

$$\int_0^x \frac{\gamma(u)}{\mu(u)} du = \int_0^x \frac{\gamma}{\sigma(u+b)} du = \frac{\gamma}{\sigma} \ln(u+b) \Big|_0^x = \frac{\gamma}{\sigma} \ln\left(\frac{x+b}{b}\right) \quad (23)$$

A stacionárius sűrűségfüggvényre:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{\mu(0)Q(0)}{\mu(x)} e^{-\int_0^x \frac{\gamma(u)}{\mu(u)} du} = \frac{\sigma b Q(0)}{\sigma(x+b)} e^{-\frac{\gamma}{\sigma} \ln\left(\frac{x+b}{b}\right)} = Q(0) \left(\frac{x+b}{b}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{x+b}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}} \\ \Rightarrow Q(x) &= Q(0) \left(\frac{x+b}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} = Q(0) \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} \end{aligned} \quad (24)$$

A normálási feltételből:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Q(x) dx &= 1 \\ \int_0^\infty Q(0) \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dx &= Q(0) \cdot b \int_1^\infty t^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dt = Q(0) \cdot b \left. \frac{t^{-\frac{\gamma}{\sigma}}}{-\frac{\gamma}{\sigma}} \right|_1^\infty = Q(0) \cdot b \cdot \frac{\sigma}{\gamma} \cdot 1^{-\frac{\gamma}{\sigma}} = 1 \\ \Rightarrow Q(0) &= \frac{\gamma}{b\sigma} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{\gamma}{b\sigma} \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} \quad (26)$$

Ezt az eloszlást az irodalomban Tsallis–Pareto (vagy Lomax II) eloszlásnak nevezik. Nagyon sok társadalmi, biológiai és közgazdasági rendszerben ismert eloszlás. Univerzalitása arra utal, hogy a preferenciális növekedés nagyon sok komplex rendszerben jelen levő stochasztikus folyamat. Ebben az esetben az átlagra átskálázott eloszlásfüggvény:

$$Q(y) = \frac{\gamma}{b\sigma} \left(1 + \frac{\sigma}{\gamma - \sigma} y\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} \quad (27)$$

(az átlagérték kiszámítása a Függelék I b-résztében megtalálható).

### 2.2.3. Normál eloszlás

Cseréljük fel a következőkben a reszetálási és növekedési ráták jellegét. Tekintsünk egy konstans növekedési rátát,  $\mu(x) = \sigma^2$ , és egy lineáris reszetálási rátát,  $\gamma(x) = x$  [1]. Ebben az esetben :

$$\gamma(x) = x \quad (28)$$

$$\mu(x) = \sigma^2 \Rightarrow \mu(0) = \sigma^2 \quad (29)$$

$$\int_0^x \frac{\gamma(u)}{\mu(u)} du = \int_0^x \frac{u}{\sigma^2} du = \frac{u^2}{2\sigma^2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2\sigma^2} \quad (30)$$

A stacionárius eloszlásfüggvény:

$$Q(x) = \frac{\mu(0)Q(0)}{\mu(x)} e^{-\int_0^x \frac{\gamma(u)}{\mu(u)} du} = \frac{\sigma^2 Q(0)}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = Q(0) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (31)$$

A normálási feltételből:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Q(x) dx &= 1 \\ \int_0^\infty Q(0) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx &= Q(0) \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = Q(0) \int_0^\infty e^{-u^2} \sigma \sqrt{2} du = Q(0) \sigma \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Rightarrow Q(0) \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} &= 1 \Rightarrow Q(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Rightarrow Q(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (33)$$

A fenti integrálás során a következő helyettesítés és integrál került alkalmazásra:  $\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} = u$  és  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du$ . A kapott eloszlásfüggvény a jólismert normál, vagy Gauss-eloszlás, ami szintén nagyon általános komplex jelenségek esetén. Az átlaghoz skálázott értékekre az eloszlásfüggvény:

$$Q(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{y^2}{\pi}} \quad (34)$$

(az átlagérték kiszámítása a Függelék I c-résztében megtalálható).

#### 2.2.4. További esetek

A fentiekben olyan eseteket tárgyaltunk, ahol vagy mindkét rátának egy konstans értéke volt, vagy az egyik ráta lineáris jellegű volt és a másik pedig konstans. Vegyünk most olyan esetet amikor mindkét rátát lineárisnak tekintjük, és vizsgáljuk meg, ebben az esetben milyen eloszláshoz jutunk.

$$\gamma(x) = ax \quad (35)$$

$$\mu(x) = x + b \Rightarrow \mu(0) = b \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\gamma(u)}{\mu(u)} du &= \int_0^x \frac{au}{u+b} du = a \int_0^x \left( \frac{u+b}{u+b} - \frac{b}{u+b} \right) du = a \left[ u - b \ln(u+b) \right] \Big|_0^x = \\ &= ax - ab \ln\left(\frac{x+b}{b}\right) \end{aligned} \quad (37)$$

A stacionárius eloszlásfüggvény:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{\mu(0)Q(0)}{\mu(x)} e^{-\int_0^x \frac{\gamma(u)}{\mu(u)} du} = \frac{bQ(0)}{x+b} e^{-ax+ab\ln\left(\frac{x+b}{b}\right)} = Q(0) \left(\frac{x+b}{b}\right)^{-1} e^{-ax} \left(\frac{x+b}{b}\right)^{ab} \\
\Rightarrow Q(x) &= Q(0)(x+b)^{ab-1} \cdot e^{-ax} b^{1-ab}
\end{aligned} \tag{38}$$

Ez egy Gamma típusú eloszlás. Ahhoz, hogy a továbbiakban a Gini-index analitikusan kiszámítható legyen, tekintsük az  $ab - 1 = 1$  esetet. Ekkor  $ab = 2$ . A stacionárius sűrűségfüggvény normálása ezen esetben:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty Q(x) dx &= 1 \\
\int_0^\infty \frac{Q(0)}{b} e^{-ax}(x+b) dx &= \frac{Q(0)}{b} \left(-\frac{1}{a}\right) e^{-ax}(x+b) \Big|_0^\infty + \frac{Q(0)}{b} \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-ax} dx = \\
&= \frac{Q(0)}{a} - \frac{Q(0)}{b} \frac{1}{a^2} e^{-ax} \Big|_0^\infty = Q(0) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{ba^2}\right) = Q(0) \frac{1+ab}{ba^2} = 1 \\
\Rightarrow Q(0) &= \frac{ba^2}{1+ab}
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{a^2}{1+ab} \cdot e^{-ax}(x+b) \tag{40}$$

Felhasználva az  $ab = 2$  kitételt ( $b = 2/a$ ) azt kapjuk, hogy:

$$Q(x) = \frac{a^2}{3} e^{-ax} \left(x + \frac{a}{2}\right) \tag{41}$$

Általános esetben, mikor az  $ab = 2$  egyenlet nem áll fenn, a stacionárius állapotfüggvény normált alakja:

$$Q(x) = a^{ab} \Gamma(ab, ab)^{-1} (x+b)^{ab-1} e^{-a(x+b)}, \tag{42}$$

ahol  $\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ . Ezen esetekben azonban a Gini-indexet csak numerikusan tudjuk majd meghatározni a Wolfram Mathematica program segítségével.

### 3. Gini-index

A konstans és lineáris növekedési és reszetálási ráták esetén jól ismert eloszlásokhoz jutotunk. Felvetődik a kérdés, hogy ha egy adott komplex rendszerben ezek a ráták a folyamat jellemzői, a stacionárius esetben milyen mértékű egyenlőtlenségekhez vezetnek. Mennyire különbözőek például a jövedelmek vagy a vagyonok, ha a jövedelmet/vagyont jellemző evolúciós egyenletre releváns az általunk használt alak.

Ezen egyenlőtlenségek jellemzésére felhasználjuk a Gini-indexet, amely egy mérőszám, és statisztikai eloszlásokban az egyenlőtlenségeket hivatott mérni. Értékeit 0 és 1 között veszi fel,  $G = 0$  teljes egyenlőség esetén (minden egyednek azonos a vagyona),  $G = 1$  teljes egyenlőtlenség esetén (egy egyén birtokolja az összvagyon) lesz [3].

Egy sokaságban, ahol az egyedeket jellemző releváns paraméterek értékei  $x_i$ , a Gini-index általánosan elfogadott értéke [3]:

$$G = \frac{1}{2\langle x \rangle n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|, \quad (43)$$

és ahol  $\langle x \rangle$  az  $n$  elemű halmaz átlaga.

Folytonos esetben ahol,  $\rho(x)$  a sokaságot jellemző normált valószínűség-sűrűségfüggvény a Gini-index [3]:

$$G = \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(x)\rho(y)|x-y|dydx = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty \int_x^\infty \rho(x)\rho(y)(y-x)dydx \quad (44)$$

A következőkben tekintsük azokat az eloszlásokat, amelyeket a 2-ik fejezetben határoztunk meg, és kiszámítjuk mindegyik esetben, ahol ezt analitikusan lehet, a Gini-indexet.

#### 3.1. Gini-index exponenciális eloszlásra

Exponenciális eloszlás esetében a sűrűségfüggvényre a  $Q(x) = \frac{\gamma}{\mu} e^{-\frac{\gamma}{\mu}x}$  alakot kaptuk. Ebben az esetben a Gini-index kiszámítása a következő:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty \int_0^\infty Q(x)Q(y)|x-y|dydx = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty Q(x)Q(y)(y-x)dy = \\ &= \frac{\gamma^2}{\mu^2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} e^{-\frac{\gamma}{\mu}y}(y-x)dy = \frac{\gamma^2}{\mu^2\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} dx \int_x^\infty e^{-\frac{\gamma}{\mu}y}(y-x)dy \end{aligned} \quad (45)$$

Az átlagérték,  $\langle x \rangle$  kiszámítása:

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty xQ(x)dx = \frac{\gamma}{\mu} \int_0^\infty xe^{-\frac{\gamma}{\mu}x}dx = \frac{\mu}{\gamma} \quad (46)$$

A Gini-indexre és az átlagértékre a teljes számítások a Függelék I a-résztében találhatóak. Ezen számítások alapján a Gini-indexre a következő egyszerű univerzális értéket kapjuk:

$$G = \frac{1}{2} \quad (47)$$

Megfigyelhető, hogy a kapott érték nem függ az eloszlásfüggvényben szereplő  $\gamma$  és  $\mu$  paraméterektől. Tehát bármekkora is a növekedési és reszetálási ráta, amikor ezeknek konstans értéket állítunk be a Gini-index 0.5 lesz.

### 3.2. Gini-index a Tsallis–Pareto eloszlásra

A Tsallis–Pareto eloszlás esetében  $Q(x) = \frac{\gamma}{b\sigma} \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}}$  sűrűségfüggvényhez jutottunk. A  $\sigma$  és  $b$  paraméter jellemezte a lineáris növekedési rátát:  $\mu(x) = \sigma(x + b)$ . Az ehhez kiszámítható Gini-index:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty \int_0^\infty Q(x)Q(y)|x-y| dy dx = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty Q(x)Q(y)(y-x) dy = \\ &= \frac{\gamma^2}{b^2\sigma^2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} \left(1 + \frac{y}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} (y-x) dy = \\ &= \frac{\gamma^2}{b^2\sigma^2\langle x \rangle} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dx \int_x^\infty \left(1 + \frac{y}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} (y-x) dy \end{aligned} \quad (48)$$

Az átlagérték,  $\langle x \rangle$  kiszámítása:

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty xQ(x) dx = \frac{\gamma}{b\sigma} \int_0^\infty x \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dx = \frac{b\sigma}{\gamma - \sigma} \quad (\text{ha } \gamma > \sigma) \quad (49)$$

A Függelék I b-részében megtalálhatóak a teljes számítások. Ezekből a számításokból észrevehető, hogy az eredményeink csak akkor lesznek elfogadhatók, ha  $\gamma > \sigma$ . Ilyen esetben a Gini-index:

$$G = \frac{\gamma}{2\gamma - \sigma} > \frac{1}{2} \quad (\text{ha } \gamma > \sigma) \quad (50)$$

Ebben az esetben arra a következtetésre jutunk, hogy a Gini-index függeni fog az eloszlás  $\gamma$  és  $\sigma$  paramétereitől. Emellett, az értéke nagyobb lesz, mint 0.5, ha  $\gamma > \sigma$ , tehát a preferenciális növekedésnek köszönhetően nagyobb egyenlőtlenségeket kapunk, mint a konstans ráták esetén kapott exponenciális eloszlásra.

### 3.3. Gini-index a normál eloszlás esetén

Normál eloszlás esetén  $Q(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$  alakú a sűrűségfüggvény. A Gini-index:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty \int_0^\infty Q(x)Q(y)|x-y| dy dx = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty Q(x)Q(y)(y-x) dy = \\ &= \frac{2}{\pi\sigma^2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} (y-x) dy = \\ &= \frac{2}{\pi\sigma^2\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} (y-x) dy \end{aligned} \quad (51)$$

Az átlagérték,  $\langle x \rangle$  kiszámítása:

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} xQ(x) dx = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \quad (52)$$

A teljes számítás menete a Függelék I c-részében található. Ezek alapján a Gini-index:

$$G = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 < \frac{1}{2} \quad (53)$$

A tekintett normál eloszlás esetén a Gini-index nem függ az eloszlás  $\sigma$  paraméterétől, amely a növekedési rátát határozta meg. Az is megfigyelhető, hogy értéke kisebb, mint  $1/2$ , ami kisebb egyenlőtlenséget jelent annál, amit az exponenciális és Tsallis–Pareto típusú eloszlásoknál láttunk.

### 3.4. További esetek

Abban az esetben amikor az eloszlás sűrűségfüggvénye  $Q(x) = \frac{a^2}{1+ab} \cdot e^{-ax}(x+b)$  alakú, a Gini-index kiszámításakor a következőkhöz jutunk:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Q(x)Q(y)|x-y| dy dx = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} Q(x)Q(y)(y-x) dy = \\ &= \frac{a^4}{(1+ab)^2 \langle x \rangle} \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} e^{-ax}(x+b) \cdot e^{-ay}(y+b)(y-x) dy = \\ &= \frac{a^4}{(1+ab)^2 \langle x \rangle} \int_0^{\infty} e^{-ax}(x+b) dx \int_x^{\infty} e^{-ay}(y+b)(y-x) dy \end{aligned} \quad (54)$$

Az átlagérték,  $\langle x \rangle$  kiszámítása:

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} xQ(x) dx = \frac{a^2}{1+ab} \int_0^{\infty} x(x+b)e^{-ax} dx = \frac{2+ab}{a(1+ab)} \quad (55)$$

A Függelék I d-részbeli számítások alapján a Gini-index:

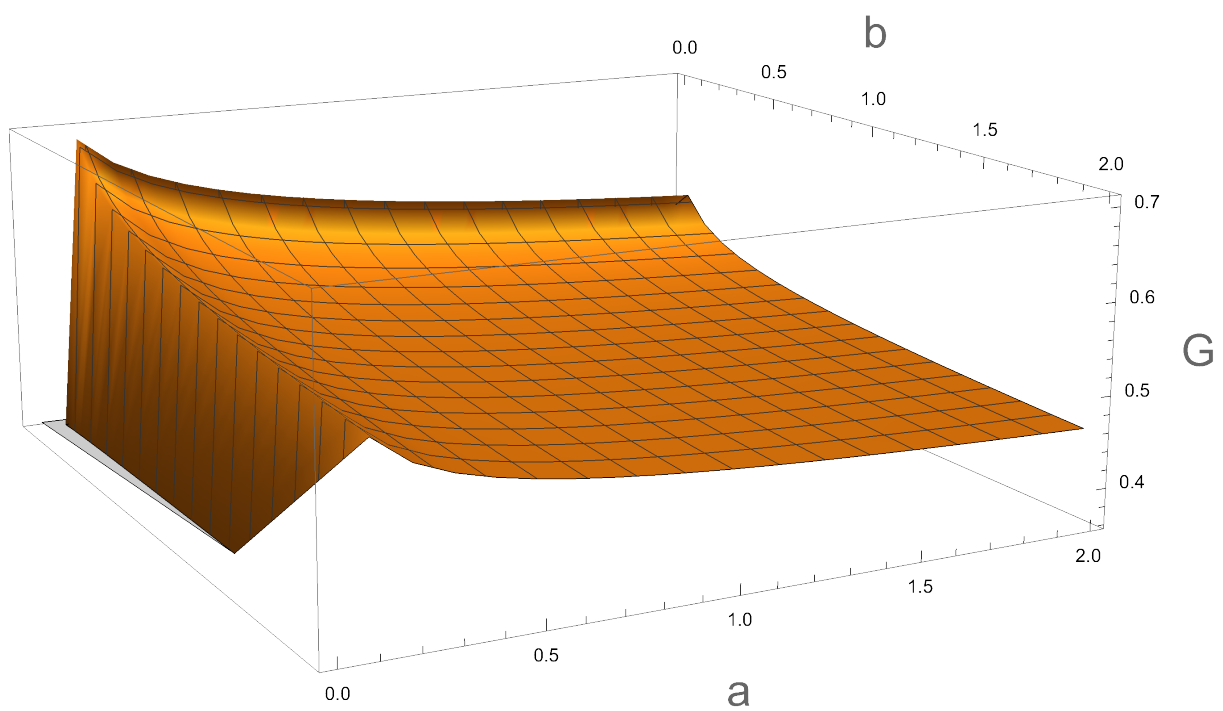
$$G = \frac{3+2ab(3+ab)}{4(1+ab)(2+ab)} \quad (56)$$

Az  $ab = 2$  kitételrel:

$$G = \frac{23}{48} \approx 0.479 \quad (57)$$

Ezen esetben is tehát egy  $G < 1/2$ -es Gini-indexet kapunk. Abban az esetben viszont, amikor az  $ab \neq 2$  a Wolfram Mathematica programmal kapott eredmény a 3.1. ábrán látható.





3.1. ábra. Gini-index függése az  $a$  és  $b$  paraméterek függvényében

## 4. Véges méret effektusok

A következőkben hasonlítsuk össze a végtelen sokaságban analitikusan számított Gini-indexet azzal az értékkel, amit egy véges populációra kapnánk, ha az egyedek jellemzőit az adott eloszlás szerint numerikusan generáljuk. Konkrétan, az érdekel minket, hogyan konvergálnak a véges sokaságban a (43) képlet szerint kiszámított Gini-indexek a folytonos esetben (44) képlet szerint kapott értékekhez.

A következő numerikus kísérleteket végezzük:

- a vizsgált eloszlás szerint generálunk véletlen számokat
- ezekre a generált számokra meghatározzuk a Gini-indexet
- növelve a generált számokat ( $n$  db) meghatározzuk a  $G(n)$  értékét

Ezután elkészítjük a  $G(n)$  ábrát, ahol  $n$  a pontok számát jelöli, amelyekre a Gini-index ki lett számolva. Az eredményeket összehasonlítjuk az analitikus számítások során meghatározott Gini-index értékekkel.

### 4.1. Exponenciális eloszlás esete

Folytonos esetben az exponenciális eloszlásra a (47) egyenlet értelmében a Gini-index értéke  $1/2$ , és nem függ az eloszlás paramétereitől. Jelöljük a (19) egyenlet által megadott eloszlásban szereplő  $\frac{\gamma}{\mu}$  arányt  $\lambda$ -val. Az  $n$  értékére maximum  $N = 1000$  pontot tekintettünk.

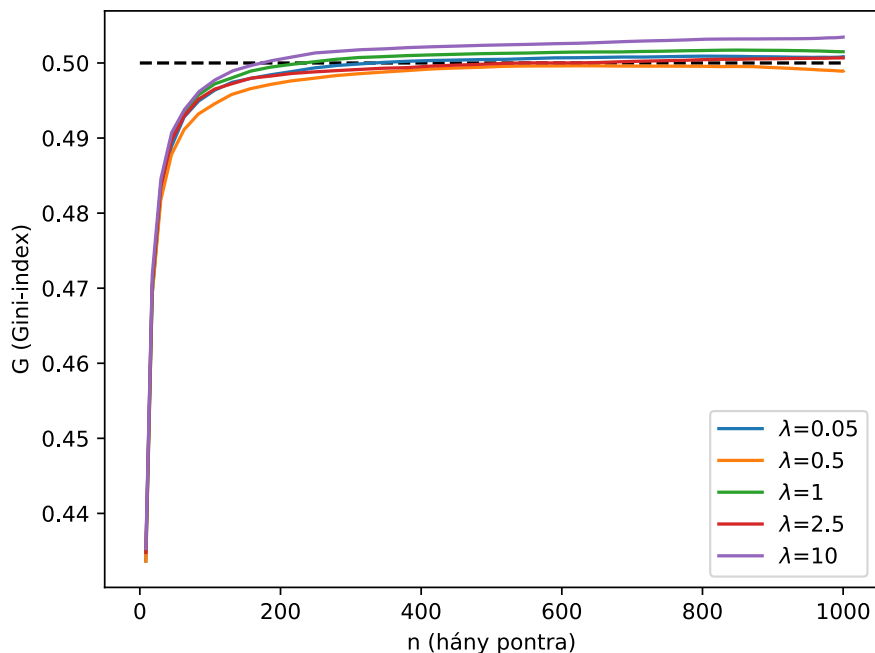
A véletlen számokat a következő algoritmus segítségével generáltuk:

- Legyen  $Gen1$  egy olyan véletlenszám generátor, amely egyenletes eloszlással ad értékeket a  $[0, 1)$  intervallumon
- Szükségünk van egy olyan  $Gen2$  véletlenszám generátorra, amely a  $g(x)$  eloszlás szerint térít vissza értékeket az  $[R_{min}, R_{max})$  intervallumon, ahol  $\int_{R_{min}}^{R_{max}} g(z) dz = 1$ . Ebben az esetben a  $g(x) = Q(x) = \frac{\gamma}{\mu} e^{-\frac{\gamma}{\mu}x}$ .
- A következő képlettel ez megvalósítható:

$$Gen2 = G^{-1}[Gen1 + G(R_{min})], \quad (58)$$

- Az (58) összefüggésben  $G(x) = \int g(x) dx$ , ebben az esetben:  $G(x) = -e^{-\frac{\gamma}{\mu}x}$ , illetve  $G^{-1} = -\frac{\mu}{\gamma} \log(-x)$ ,  $R_{min} = 0$

A 4.1. ábrán a (43) képlet szerint számított Gini-indexet a generált pontok száma szerint ábrázoltuk. Az figyelhető meg, hogy a véges sokaság esetén is a Gini-index értékei az  $1/2$ -es értékhez tartanak. A folytonos eset  $n \rightarrow \infty$  értéknek felel meg, a szimuláció során azonban  $n$



4.1. ábra. Exponenciális eloszlás esetében a Gini-index a véletlenszerűen generált pontok számának a függvényében

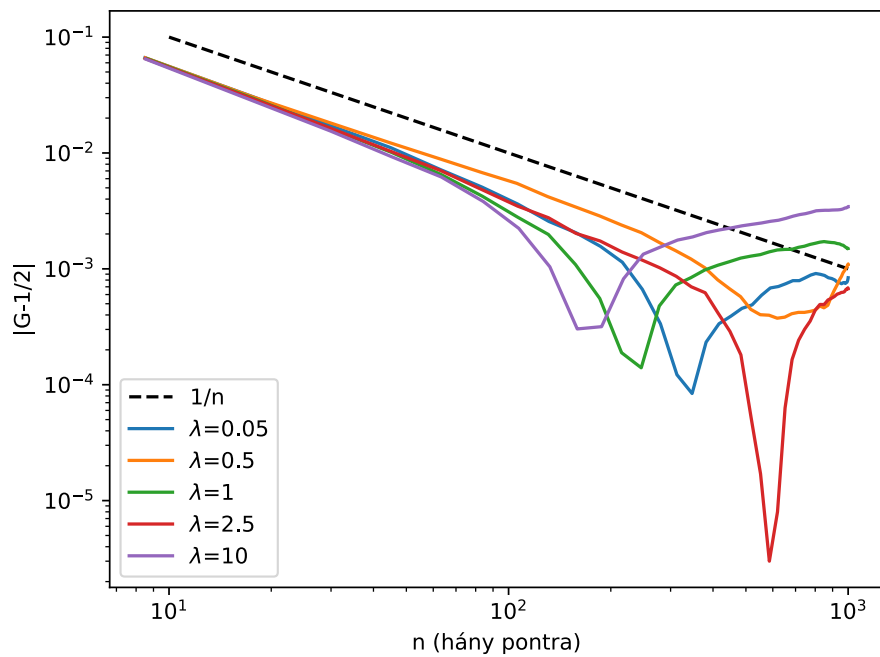
maximális értéke 1000 volt. Észrevehető, hogy véges  $n$  esetén jelentősek a véges-méret effektusok. Ezen véges méret hatásokat, korábban más kutatók is észrevették [2], és azt javasolták, hogy véges sokaságra a (43) képletben az  $n^2$  helyett az  $n(n-1)$ -et használjanak. Ezáltal valójában csak a releváns különbségek számával osztunk. A 4.2. ábrán a  $|G - 1/2|$  értéket ábrázolva látható, hogy a különbség az  $1/n$ -el skálázódik, ami arra utal, hogy a végesméret effektusok az  $n^2$  használatában keresendők. A korrekciós képlet így:

$$G = \frac{1}{2\langle x \rangle n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \quad (59)$$

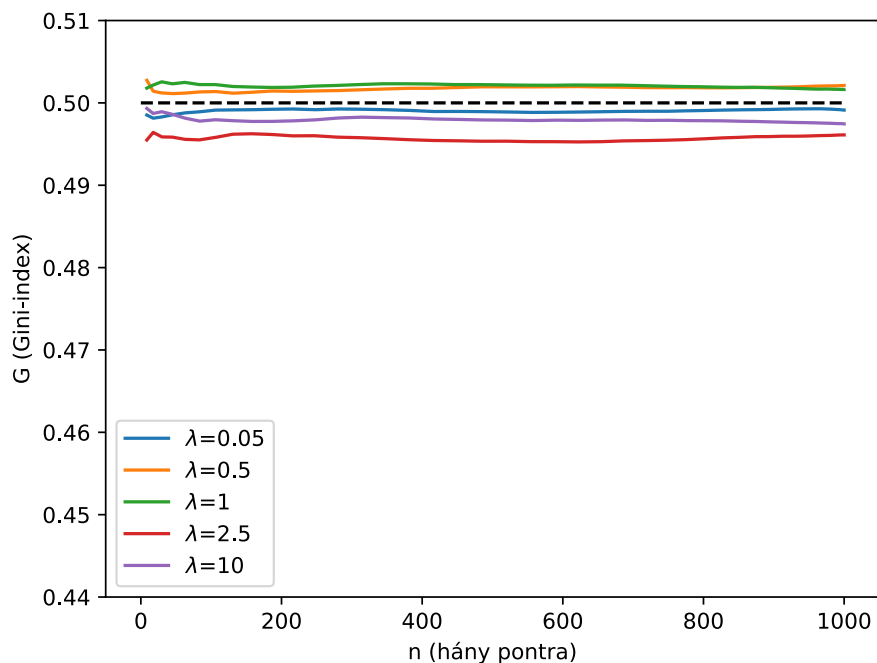
A 4.3. ábrán ezúttal az (59) korrekciós képletet használva ábrázoltuk a Gini-indexet a generált pontok száma szerint. Ezen az ábrán megfigyelhető, hogy a 4.1. ábrával ellentétben, ebben az esetben már kis számú pontok esetében is a Gini-index az  $1/2$ -es értéket adja vissza. Ha ezekre az értékekre ábrázoljuk a numerikus kísérlet során kapott értékek és az analitikus számítás eredménye közti különbség moduluszát, megfigyelhető, hogy megszűnik az  $1/n$ -es tendencia. Ezt a 4.4. ábra illusztrálja.

## 4.2. Tsallis–Pareto eloszlás esete

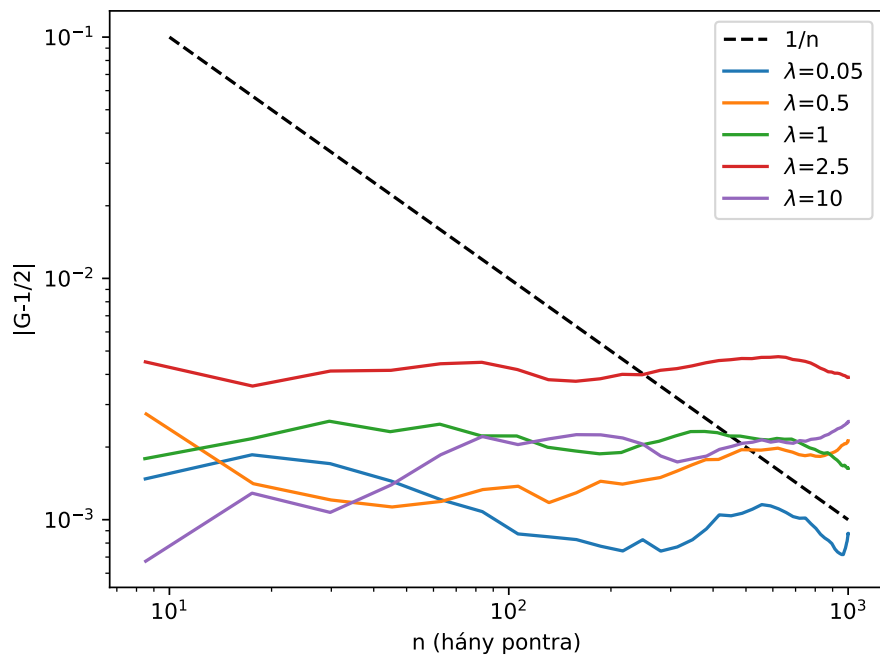
Tsallis–Pareto eloszlást tekintve a Gini-indexre folytonos ( $n \rightarrow \infty$ ) esetben a (50) egyenlet a  $G = \frac{\gamma}{2\gamma - \sigma}$  eredményt adta. Jelöljük a (26) egyenlet által megadot eloszlásban szereplő  $\frac{\gamma}{\sigma}$  arányt



4.2. ábra. Exponenciális eloszlás esetében a (43)-es Gini-index és valódi értéke közti különbség skálázása  $n$  függvényében. Jól észrevehető az  $1/n$ -es trend, ami az  $n^2$  és  $n(n-1)$  közti különbségnek tulajdonítható.



4.3. ábra. Exponenciális eloszlás esetében a Gini-index a véletlenszerűen generált pontok számának a függvényében a korrekciós képletet használva



4.4. ábra. Exponenciális eloszlás esetében a (59)-es Gini-index és valódi értéke közti különbség skálázása  $n$  függvényében.

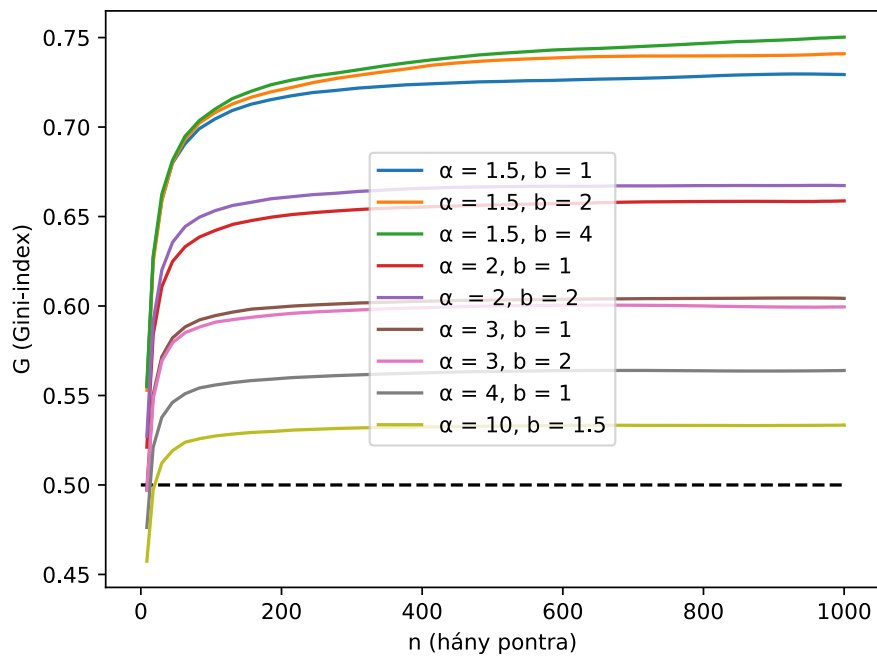
$\alpha$ -val. Ekkor a Gini indexre a jelölés:  $G = \frac{\alpha}{2\alpha-1}$ . A numerikus kísérleteink során  $N = 1000$  pontot tekintettünk.

A Tsallis–Pareto eloszlás szerinti véletlen számokat, hasonlóan, mint az exponenciális eloszlásra, az (58) összefüggéssel generáltuk. Ezen eloszlás esetében a megfelelő függvények a:

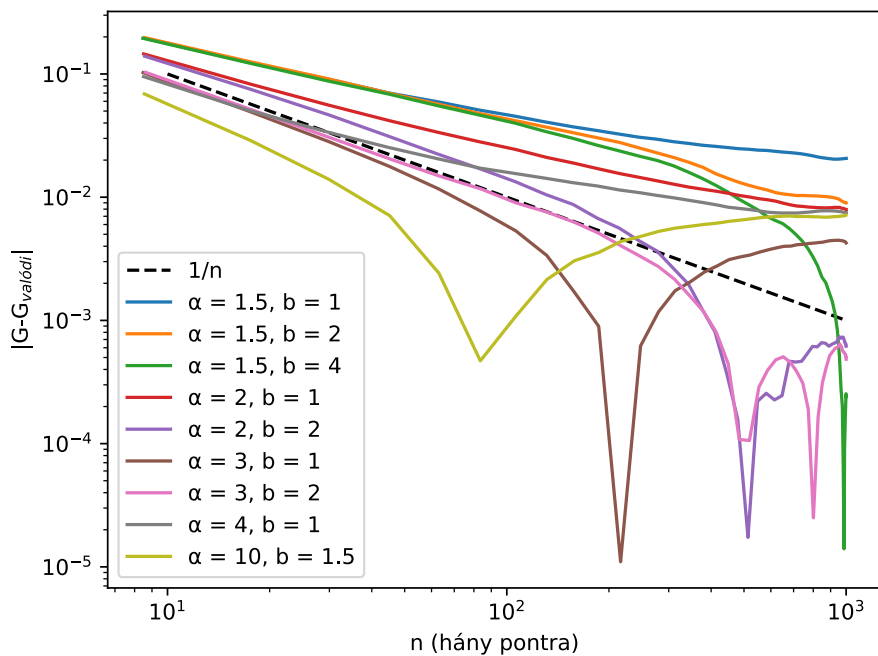
- $g(x) = Q(x) = \frac{\gamma}{b\sigma} \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}}$
- $G(x) = - \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}}, G^{-1} = b \left[(-x)^{-\frac{\sigma}{\gamma}} - 1\right], R_{min} = 0$

A 4.5. ábrán a Gini-indexet a véletlenszerűen generált pontok száma szerint ábrázoltuk. Tsallis–Pareto eloszlás esetében is megvizsgáljuk a Gini-index várható és valódi értéke közötti különbséget, ezt jeleníti meg a 4.6. ábra.

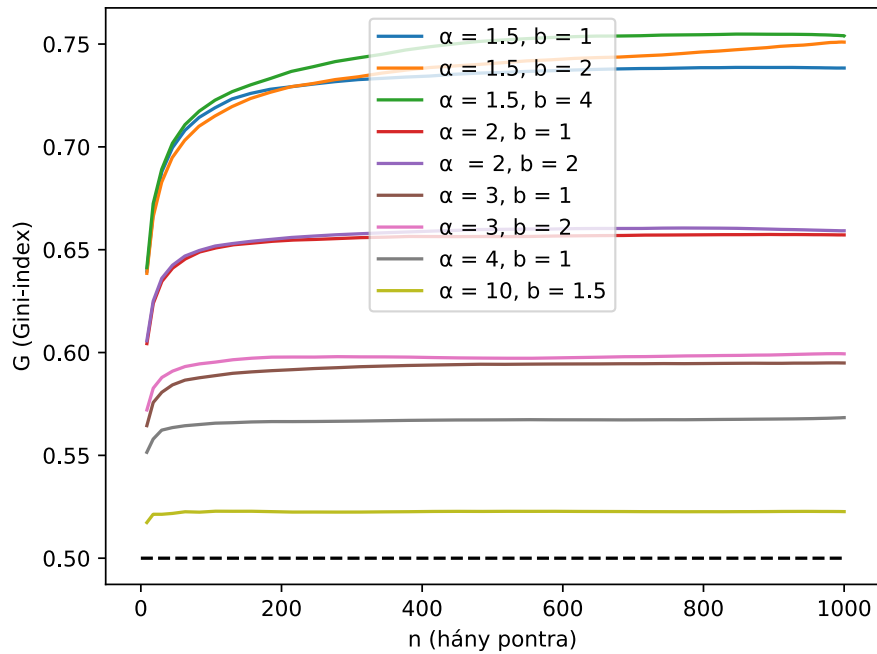
Megfigyelhető, hogy ebben az esetben is jelentkezik a véges méret effektus, amelyet az exponenciális eloszlás esetében is megfigyelhettünk. A szükséges korrekció megint az  $1/n$  szerint skálázódik, ami az  $n^2$  és az  $n(n-1)$  közti különbségnek tulajdonítható. Ezen eloszlás esetében az (59) korrekciós képlettel újraszámolt Gini-indexek függését a pontok számától a 4.7. ábra szemlélteti. A 4.7. ábrán is megfigyelhető, hogy már kis  $n$  esetére is pontosabb értéket kapunk, mint a korábbi esetben (4.5. ábra).



4.5. ábra. Tsallis-Pareto eloszlás esetében a Gini-index a generált pontok számának függvényében



4.6. ábra. Tsallis–Pareto eloszlás esetében a véges sokaságban generált Gini-index és a folytonos esetben számított érték közti különbség



4.7. ábra. Tsallis-Pareto eloszlás esetében a Gini-index a generált pontok számának függvényében–korrekciós képlet használata

### 4.3. Normál eloszlás esete

Tekintsük most a normál eloszlást, amelynél a Gini-indexre folytonos ( $n \rightarrow \infty$ ) esetben a (53) egyenlet a  $G = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$  eredményt adta. A numerikus kísérleteink során  $N = 1000$  pontot tekintettünk. A véletlen számok generálásához a Box–Müller algoritmust használtuk, mely a következő lépéseket tartalmazza:

- generáljuk  $x_1$  és  $x_2$  számokat, egyenletes eloszlás szerint, a  $[0, 1)$  intervallumon
- megszerkeszthető az  $y_1$  és  $y_2$  az  $x_1$  és  $x_2$  segítségével, úgy hogy az  $y_1$  és  $y_2$  normál eloszlást kövessen 0 átlagértékkel és 1-es szórással:

$$y_1 = \sqrt{-2 \cdot \log(x_1)} \cdot \cos(2\pi x_2) \quad (60)$$

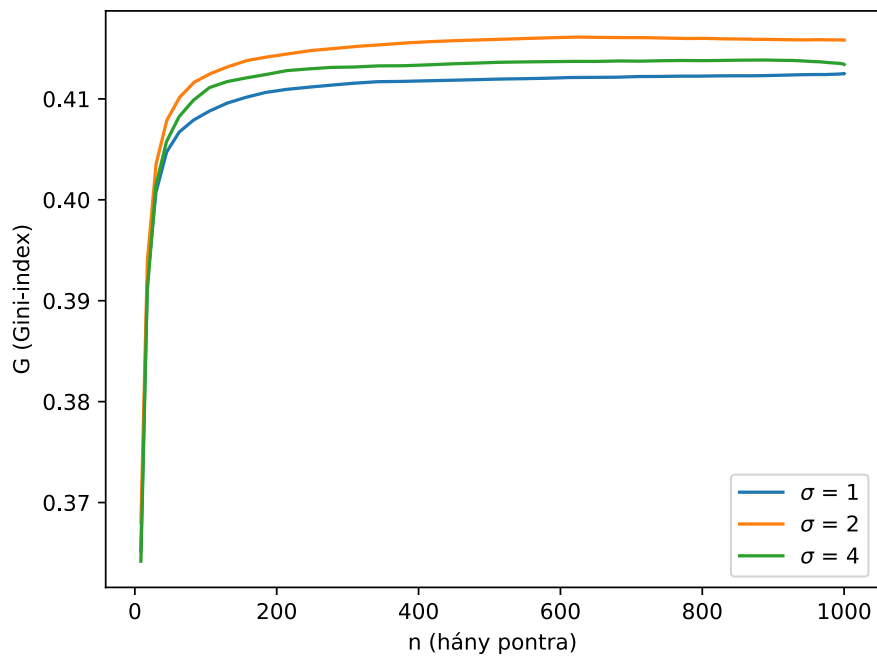
$$y_2 = \sqrt{-2 \cdot \log(x_1)} \cdot \sin(2\pi x_2) \quad (61)$$

- adott  $\mu$  átlagú és  $\sigma$  szórássú normál eloszlásra:

$$z_1 = \mu + \sigma \cdot y_1 \quad (62)$$

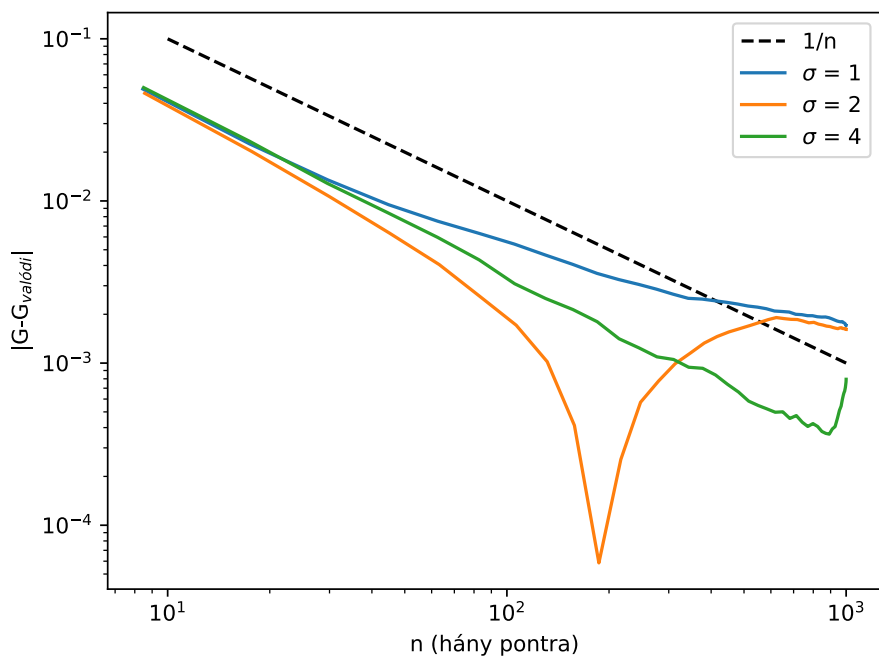
$$z_2 = \mu + \sigma \cdot y_2 \quad (63)$$

A 4.8. ábrán a (43) képlet szerint számított Gini-indexet a generált pontok száma szerint



4.8. ábra. Normál eloszlás esetében a Gini-index a generált pontok számának függvényében

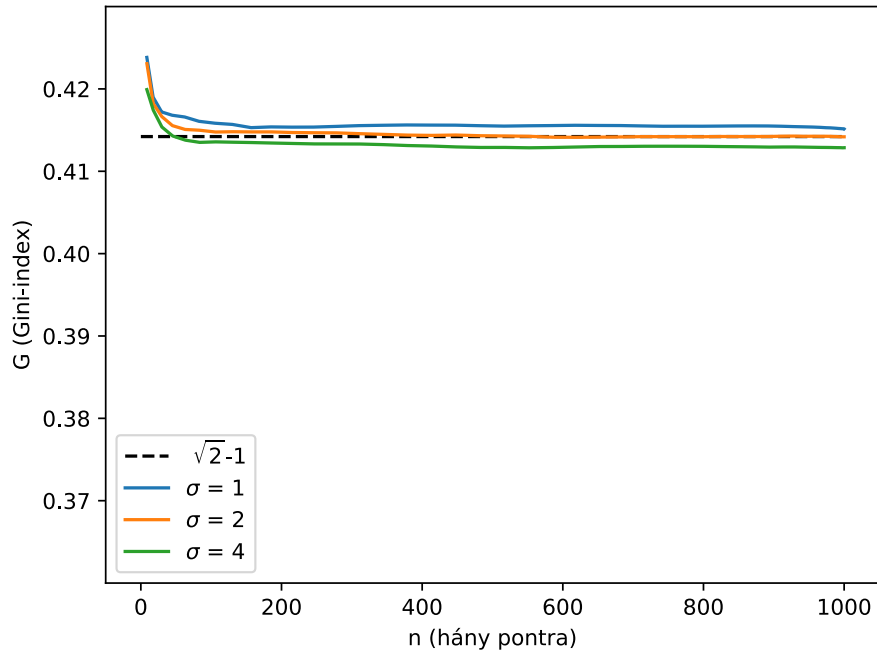
ábrázoltuk normál eloszlást tekintve. Ebben az esetben a Gini-index várható és valódi értéke közötti különbséget a 4.9. ábra illusztrálja.



4.9. ábra. Normál eloszlás esetében a véges sokaságban generált Gini-index és a folytonos esetben számított érték közti különbség



Normál eloszlás esetében az (59) korrekciós képlettel újraszámolt Gini-indexek függését a pontok számától a 4.10. ábra szemlélteti. Ezen az ábrán is észrevehető, hogy már kis  $n$  esetére is pontosabb értéket kapunk, mint a korábbi esetben (4.8. ábra).



4.10. ábra. Korrekciós képlettel normál eloszlás esetében a Gini-index a generált pontok számának függvényében

## 5. Több exponenciális eloszlás összetevése

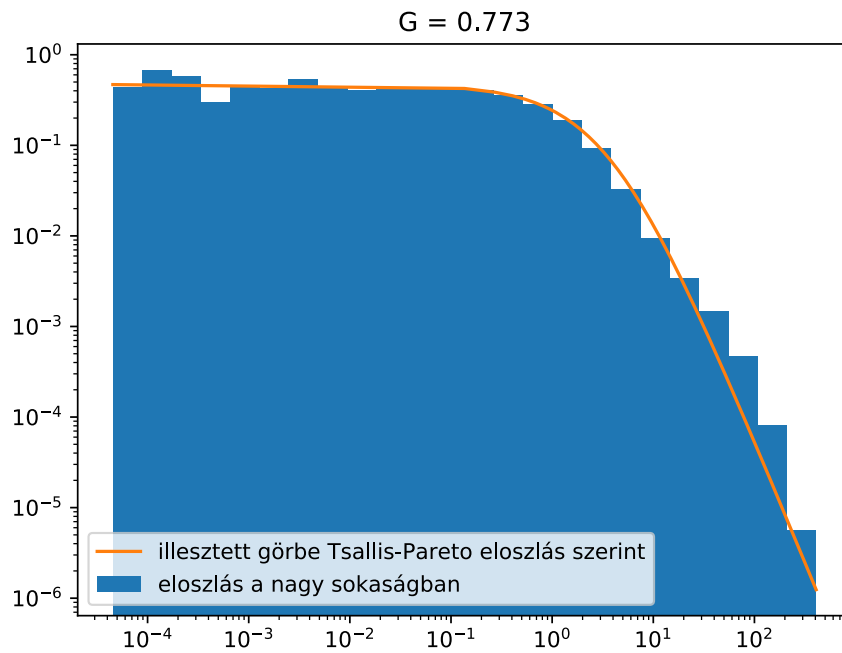
A (47) egyenlet alapján megkaptuk, hogy exponenciális eloszlás esetében a Gini-index értéke  $1/2$ , és ez az érték nem függ az eloszlás paramétereitől. Felmerülhet az a kérdés, hogy ha tekintünk több, különböző kezdeti paraméterű exponenciális eloszlású sokaságot, és ezeket egy új, nagy sokaságnak tekintjük, akkor mennyi lesz a keletkezett új sokaság Gini-indexe. Megmarad a Gini-index értéke  $1/2$ -nek vagy más értéket fogunk kapni? Ennek a feladatnak közgazdasági és szociológiai vonatkozásai vannak, hiszen sok esetben település szintjén az eloszlás exponenciálissal közelíthető meg. Sok települést egybevéve azonban, és egy nagyobb struktúrát alkotva az eloszlás Pareto típusú lesz, és ezáltal automatikusan a struktúrára kapott Gini  $1/2$ -nél nagyobb lesz. Ennek a lehetőségét szeretnénk itt vizsgálni. A kérdés megválaszolására tekintsük a következő numerikus kísérletet:

- veszünk több exponenciális eloszlású sokaságot, ezeket a sokaságokat a 4.1-es alfejezetben említett módszerrel generáljuk
- adott sokaságra az eloszlás  $\lambda$  paraméterét véletlenszerűen választjuk ki a  $[0, 1)$  intervallumból, a sokaság nagyságát is hasonlóan véletlenszerűen választjuk ki az  $[1, 10000)$  intervallumból
- a sokaságokra kapott elemeket egy nagy halmazba helyezzük, majd erre a nagy halmazra kiszámítjuk a Gini-indexet, ebben az esetben a Gini-indexre a következő képletet használjuk: [4]

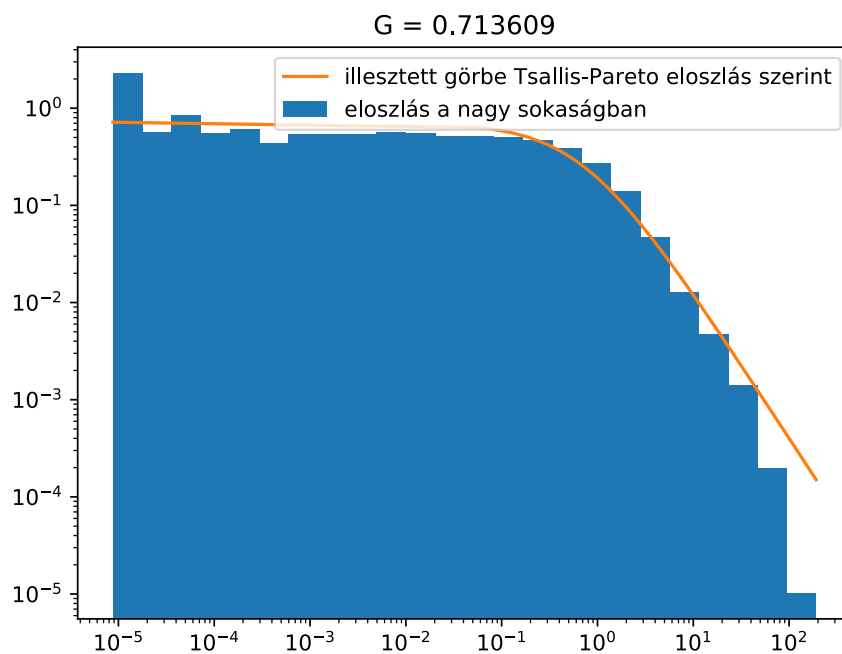
$$G = \frac{2}{n^2 \langle x \rangle} \sum_{i=1}^n i(x_i - \langle x \rangle) = \frac{\sum_{i=1}^n (2i - n - 1)x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i}, \quad (64)$$

ebben az esetben az  $x_i$  értékek növekvő sorrendben vannak rendezve,  $i$  az adott  $x_i$  érték sorszáma

Az eredmények egy  $1/2$ -nél nagyobb Gini-indexet mutatnak. A nagy sokaság eloszlását vizsgálva, erre az eloszlásra ráilleszhető egy Tsallis–Pareto típusú eloszlásfüggvény. Az 5.1. ábra  $n = 10$  darab sokaságra kapott eloszlást mutatja. Ebben az esetben a Gini-index értéke:  $G = 0.773 \neq 0.5$ . Az 5.2. ábra  $n = 20$  darab sokaságra kapott eloszlást mutatja, amely esetben a Gini-index értéke:  $G = 0.714 \neq 0.5$ .



5.1. ábra.  $n = 10$  darab sokaság összetevése során kapott eloszlás, illetve az eloszlásra illesztett eloszlásfüggvény



5.2. ábra.  $n = 20$  darab sokaság összetevése során kapott eloszlás, illetve az eloszlásra illesztett eloszlásfüggvény

## Következtetések

Megfigyelhető, hogy lokális növekedési és reszetálási modell alkalmazásával, egyszerű konstans vagy lineáris ráták esetén olyan eloszlásokat kapunk ahol a Gini-index nagyon különböző értéket vesz fel. Vegyük példának települések jövedelem és vagyoneeloszlását. Különböző reszetálási és növekedési rátákra többféle vagyon/jövedelemeloszlást lehet kapni, amelyek nagyon különböző társadalmi egyenlőtlenség mértékekhez vezethetnek. Ilyenekre adtak nemrég példát a [5]-es cikkben. Ebben a dolgozatban azt tapasztalták, hogy különböző politikai rendszerekhez és korokhoz különböző eloszlásfüggvények tartoznak, amelyek jellemzők azon társadalmi-politikai törvényszerűségekre, amelyek megszták a növekedési és reszetálási ráták alakját a dinamikában. Modern társadalmak esetében is alkalmazható a növekedési és reszetálási modell, itt azonban, sokkalta komplexebb reszetálási rátával lehetett realiztikus eloszlásfüggvényt kapni [6]. Mivel ezen társadalmakra is a Pareto-típusú eloszlás érvényesül a nagy vagyonok/jövedelmek határesetében, itt is  $1/2$ -nél nagyobb Gini-indexek jellemzik a rendszer elemei közti egyenlőtlenségek mértékét.

Gyakorlati alkalmazást tekintve az a megfigyelés, hogy a társadalmi egyenlőtlenségeket jellemző Gini-indexnek különböző, az alkalmazott evolúciós egyenlet különböző egyszerű növekedési és reszetálási rátáira más-más értéke lesz, azért hasznos, mivel így a dinamikus törvényeink segítségével szabályozhatjuk a rendszer stacionárius állapotaira az egyenlőtlenség mértékét. Annak függvényében, hogy egy társadalomban a politikai hatalom milyen szintű egyenlőtlenséget szeretne az egyének között, annak függvényében választja meg a jövedelem és a vagyoneeloszláshoz vezető társadalmi és gazdasági törvényszerűségek alapjait. A preferenciális növekedés mindig nagyobb egyenlőtlenségekhez vezet. Ezt lehet korlátozni például progresszív adózással, ahol a preferencialitást egy konstans növekedési ráta helyettesíti. Hasonlóan a nyugdíjazási és fiatal munkaerővel kapcsolatos szociál-politika a reszetálási rátát tudja változtatni és ezáltal szintén befolyásolható a rendszerben levő társadalmi egyenlőtlenségek mértéke. Elfogadva tehát a növekedési és reszetálási modell alkalmazhatóságát szociális és gazdasági rendszerekre, látható, hogy a reszetálási és növekedési ráták megfelelő beállításával a társadalmakban megfigyelhető vagyone és jövedelemeloszlási egyenlőtlenségek szabályozhatóak. Ezt csinálta a kommunista gazdasági rendszer és ezt csinálja a jelenlegi szabad-piaci gazdaság politika is. Az 1-es táblázatban összefoglaljuk a különböző növekedési és reszetálási rátákra kapott eloszlások sűrűségfüggvényeinek az alakját és a hozzájuk tartozó Gini-indexre kapott intervallumot.

Kutatásaink azt is bizonyították, hogy az egyenlőtlenségeket jellemző Gini-index kiszámításánál véges sokaságok esetén érdekes végesméret-effektusok vannak, ha a klasszikusan elfogadott (43) képletet alkalmazzuk. Az  $1/n$ -el skálázó végesméret-effektus kiküszöbölhető, ha az  $n^2$ -es tag helyett az  $n(n-1)$ -es értéket használjuk. Ilyen esetben már aránylag kis sokaság esetén is a folytonos (végtelen nagy sokaságú) rendszerre levő Gini-indexet kapjuk vissza.

Különböző exponenciális eloszlással rendelkező sokaságok összetetésével Pareto típusú el-

1. táblázat. Összefoglaló táblázat a különböző növekedési és reszetálási rátákra

Növekedési ráta	Reszetálási ráta	Eloszlásfüggvény	Gini-index értéke
$\mu$	$\gamma$	$Q(x) = \frac{\gamma}{\mu} e^{-\frac{\gamma}{\mu}x}$	$G = 1/2$
$\sigma(x+b)$	$\gamma$	$Q(x) = \frac{\gamma}{b\sigma} \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}}$	$G > 1/2$
$\sigma^2$	$x$	$Q(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$G = \sqrt{2} - 1$
$x+b$	$ax$	$Q(x) = \frac{a^2}{3} e^{-ax} \left(x + \frac{a}{2}\right) \quad (b = a/2)$	$G \approx 0.479$

oszlások kaphatóak. Ezáltal, habár a sokaság elemeinek 1/2-es Gini-indexe van, az össtsokaságnak a Gini-indexe  $> 1/2$ . Ez az észrevétel szépen magyarázza azt, hogy lehet az, hogy egy nagyobb szerveződési szinten 1/2-nél nagyobb Gini-indexet mérünk, mikor az egyedi sokaságban a Gini-index 1/2.

## I. Függelék

### a. Gini-index kiszámítása exponenciális eloszlásra

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty \int_0^\infty Q(x)Q(y)|x-y| dy dx = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty Q(x)Q(y)(y-x) dy = \\
 &= \frac{\gamma^2}{\mu^2 \langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} e^{-\frac{\gamma}{\mu}y} (y-x) dy = \frac{\gamma^2}{\mu^2 \langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} dx \int_x^\infty e^{-\frac{\gamma}{\mu}y} (y-x) dy
 \end{aligned} \tag{65}$$

Legyen:

$$I = \int_x^\infty \left( ye^{-\frac{\gamma}{\mu}y} - xe^{-\frac{\gamma}{\mu}y} \right) dy = \int_x^\infty ye^{-\frac{\gamma}{\mu}y} dy - \int_x^\infty xe^{-\frac{\gamma}{\mu}y} dy = I_1 - I_2 \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_x^\infty ye^{-\frac{\gamma}{\mu}y} dy = -y \cdot \frac{\mu}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{\mu}y} \Big|_x^\infty + \frac{\mu}{\gamma} \int_x^\infty e^{-\frac{\gamma}{\mu}y} dy = x \cdot \frac{\mu}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} - \frac{\mu^2}{\gamma^2} e^{-\frac{\gamma}{\mu}y} \Big|_x^\infty = \\
 &= e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} \left( x \cdot \frac{\mu}{\gamma} + \frac{\mu^2}{\gamma^2} \right)
 \end{aligned} \tag{67}$$

$$I_2 = x \int_x^\infty e^{-\frac{\gamma}{\mu}y} dy = -x \cdot \frac{\mu}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{\mu}y} \Big|_x^\infty = x \cdot \frac{\mu}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} \tag{68}$$

Tehát:

$$I = e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} \left( x \cdot \frac{\mu}{\gamma} + \frac{\mu^2}{\gamma^2} - x \cdot \frac{\mu}{\gamma} \right) = \frac{\mu^2}{\gamma^2} e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} \tag{69}$$

A kapott eredményt visszahelyettesítve a Gini-index kiszámítását szolgáló integrálba:

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{\gamma^2}{\mu^2 \langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} \cdot \frac{\mu^2}{\gamma^2} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} dx = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{2\gamma}{\mu}x} dx = \\
 &= -\frac{\mu}{2\gamma \langle x \rangle} e^{-\frac{2\gamma}{\mu}x} \Big|_0^\infty = \frac{\mu}{2\gamma \langle x \rangle}
 \end{aligned} \tag{70}$$

Az átlagérték:

$$\begin{aligned}
 \langle x \rangle &= \int_0^\infty xQ(x) dx = \frac{\gamma}{\mu} \int_0^\infty xe^{-\frac{\gamma}{\mu}x} dx = \frac{\gamma}{\mu} \left( -x \cdot \frac{\mu}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} \Big|_0^\infty + \frac{\mu}{\gamma} \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} dx \right) = \\
 &= -\frac{\mu}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{\mu}x} \Big|_0^\infty = \frac{\mu}{\gamma}
 \end{aligned} \tag{71}$$

$$\Rightarrow G = \frac{\mu}{2\gamma} \cdot \frac{1}{\frac{\mu}{\gamma}} = \frac{1}{2} \tag{72}$$

## b. Gini-index kiszámítása Tsallis–Pareto eloszlásra

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty \int_0^\infty Q(x)Q(y)|x-y|dydx = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty Q(x)Q(y)(y-x)dy = \\
&= \frac{\gamma^2}{b^2\sigma^2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} \left(1+\frac{y}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} (y-x)dy = \\
&= \frac{\gamma^2}{b^2\sigma^2\langle x \rangle} \int_0^\infty \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dx \int_x^\infty \left(1+\frac{y}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} (y-x)dy
\end{aligned} \tag{73}$$

Legyen:

$$\begin{aligned}
I &= \int_x^\infty \left[ y \left(1+\frac{y}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} - x \left(1+\frac{y}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} \right] dy = \\
&= \int_x^\infty y \left(1+\frac{y}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dy - \int_x^\infty x \left(1+\frac{y}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dy = I_1 - I_2
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_x^\infty y \left(1+\frac{y}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dy = b \int_{\frac{x}{b}+1}^\infty b(t-1)t^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dt = \\
&= b^2 \int_{\frac{x}{b}+1}^\infty \left( t^{-\frac{\gamma}{\sigma}} - t^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} \right) dt = b^2 \left( \frac{t^{-\frac{\gamma}{\sigma}+1}}{-\frac{\gamma}{\sigma}+1} + \frac{\sigma}{\gamma} t^{-\frac{\gamma}{\sigma}} \right) \Big|_{\frac{x}{b}+1}^\infty = \\
&= - \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}+1} \cdot \frac{b^2}{-\frac{\gamma}{\sigma}+1} - \frac{b^2\sigma}{\gamma} \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}} \quad (\text{ha } \gamma > \sigma)
\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= x \int_x^\infty \left(1+\frac{y}{b}\right)^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dy = xb \int_{\frac{x}{b}+1}^\infty t^{-1-\frac{\gamma}{\sigma}} dt = -xb \cdot \frac{\sigma}{\gamma} t^{-\frac{\gamma}{\sigma}} \Big|_{\frac{x}{b}+1}^\infty = \\
&= xb \cdot \frac{\sigma}{\gamma} \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}}
\end{aligned} \tag{76}$$

A fenti integrálás során az  $1 + \frac{y}{b} = t$  helyettesítést alkalmaztuk. Tehát:

$$\begin{aligned}
I &= \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}+1} \cdot \frac{b^2}{\frac{\gamma}{\sigma}-1} - \frac{b^2\sigma}{\gamma} \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}} - xb \cdot \frac{\sigma}{\gamma} \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}} = \\
&= b^2\sigma \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}} \cdot \left[ \left(1+\frac{x}{b}\right) \frac{1}{\gamma-\sigma} - \frac{1}{\gamma} - \frac{x}{b\gamma} \right] = \\
&= b^2\sigma \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}} \cdot \frac{\gamma(b+x) - b(\gamma-\sigma) - x(\gamma-\sigma)}{b(\gamma-\sigma)\gamma} = \\
&= b^2\sigma \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}} \frac{\gamma b + \gamma x - \gamma b + \sigma b - \gamma x + \sigma x}{b(\gamma-\sigma)\gamma} = \\
&= b^2\sigma \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}} \frac{\sigma(b+x)}{b(\gamma-\sigma)\gamma} = \\
&= \frac{b^2\sigma^2}{\gamma(\gamma-\sigma)} \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma}+1}
\end{aligned} \tag{77}$$

A kapott eredményt visszahelyettesítve a Gini-index kiszámítását szolgáló integrálba:

$$\begin{aligned}
G &= \frac{\gamma^2}{b^2 \sigma^2 \langle x \rangle} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-1 - \frac{\gamma}{\sigma}} \frac{b^2 \sigma^2}{\gamma(\gamma - \sigma)} \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-\frac{\gamma}{\sigma} + 1} dx = \\
&= \frac{\gamma}{(\gamma - \sigma) \langle x \rangle} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-\frac{2\gamma}{\sigma}} dx = \frac{b\gamma}{(\gamma - \sigma) \langle x \rangle} \int_1^\infty t^{-\frac{2\gamma}{\sigma}} dt = \\
&= \frac{b\gamma}{(\gamma - \sigma) \langle x \rangle} t^{-\frac{2\gamma}{\sigma} + 1} \frac{1}{-\frac{2\gamma}{\sigma} + 1} \Big|_1^\infty = \frac{b\gamma}{(\gamma - \sigma) \langle x \rangle} \frac{1}{\frac{2\gamma}{\sigma} - 1} \quad (\text{ha } \gamma > \sigma)
\end{aligned} \tag{78}$$

Az átlagérték:

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_0^\infty x Q(x) dx = \frac{\gamma}{b\sigma} \int_0^\infty x \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-1 - \frac{\gamma}{\sigma}} dx = \frac{\gamma}{b\sigma} \int_1^\infty b^2(t-1)t^{-1 - \frac{\gamma}{\sigma}} dt = \\
&= \frac{b\gamma}{\sigma} \int_1^\infty \left(t^{-\frac{\gamma}{\sigma}} - t^{-1 - \frac{\gamma}{\sigma}}\right) dt = \frac{b\gamma}{\sigma} \left( \frac{t^{-\frac{\gamma}{\sigma} + 1}}{-\frac{\gamma}{\sigma} + 1} + \frac{\sigma}{\gamma} t^{-\frac{\gamma}{\sigma}} \right) \Big|_1^\infty = \frac{b\gamma}{\sigma} \left( \frac{-1}{-\frac{\gamma}{\sigma} + 1} - \frac{\sigma}{\gamma} \right) = \\
&= \frac{b\gamma}{\sigma} \left( \frac{\sigma}{\gamma - \sigma} - \frac{\sigma}{\gamma} \right) = \frac{b\gamma \gamma \sigma - \gamma \sigma + \sigma^2}{\sigma \gamma(\gamma - \sigma)} = \frac{b\sigma}{\gamma - \sigma} \quad (\text{ha } \gamma > \sigma)
\end{aligned} \tag{79}$$

$$\Rightarrow G = \frac{b\gamma}{(\gamma - \sigma)} \frac{\sigma}{2\gamma - \sigma} \frac{(\gamma - \sigma)}{b\sigma} = \frac{\gamma}{2\gamma - \sigma} > \frac{1}{2} \quad (\text{ha } \gamma > \sigma) \tag{80}$$



### c. Gini-index kiszámítása normál eloszlásra

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty \int_0^\infty Q(x)Q(y)|x-y| dy dx = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty Q(x)Q(y)(y-x) dy = \\
&= \frac{2}{\pi\sigma^2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} (y-x) dy = \\
&= \frac{2}{\pi\sigma^2\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} (y-x) dy
\end{aligned} \tag{81}$$

Legyen:

$$I = \int_x^\infty \left( ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} - xe^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \right) dy = \int_x^\infty ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy - \int_x^\infty xe^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = I_1 - I_2 \tag{82}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_x^\infty ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \int_{\frac{x^2}{2\sigma^2}}^\infty \sigma\sqrt{2} \cdot t^{\frac{1}{2}} e^{-t} \cdot \frac{\sigma\sqrt{2}}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \sigma^2 \int_{\frac{x^2}{2\sigma^2}}^\infty e^{-t} dt = \\
&= \sigma^2 \Gamma\left(1, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right),
\end{aligned} \tag{83}$$

$$I_2 = x \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = x \int_{\frac{x^2}{2\sigma^2}}^\infty e^{-t} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{x\sigma}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{84}$$

ahol az  $\frac{y^2}{2\sigma^2} = t$  helyettesítést, és a  $\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ -t használtuk.

Ezek alapján:

$$I = \sigma^2 \Gamma\left(1, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{x\sigma}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{85}$$

A kapott eredményt visszahelyettesítve a Gini-index kiszámítását szolgáló integrálba:

$$\begin{aligned}
G &= \frac{2}{\pi\sigma^2\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left[ \sigma^2 \Gamma\left(1, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{x\sigma}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \right] dx = \\
&= \frac{2}{\pi\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \Gamma\left(1, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx - \frac{2}{\pi\sigma\sqrt{2}\langle x \rangle} \int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx
\end{aligned} \tag{86}$$

Felhasználjuk a következő tulajdonságokat és összefüggéseket:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \tag{87}$$

$$\Gamma(1, x) = e^{-x} \tag{88}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, x\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{x}) \tag{89}$$

$$\left( e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right)' = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \left( -\frac{x}{\sigma^2} \right) \tag{90}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \tag{91}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (92)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{erf}(x)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (93)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{erfc}(x)) = -\frac{d}{dx}(\operatorname{erf}(x)) \quad (94)$$

A fentiek figyelembevételével:

$$G = \frac{2}{\pi\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx - \frac{\sqrt{2}}{\pi\sigma\langle x \rangle} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = G_1 + G_2 \quad (95)$$

$$G_1 = \frac{2}{\pi\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = \frac{2}{\pi\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-u^2} \sigma du = \frac{\sigma}{\pi\langle x \rangle} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\pi\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi\langle x \rangle}} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} G_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{\pi\sigma\langle x \rangle} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right) dx = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma\langle x \rangle} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right) dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\langle x \rangle} \int_0^\infty \left[ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{x}{\sigma^2}\right) \right] \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right) dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\langle x \rangle} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right) \Big|_0^\infty - \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)' dx = \\ &= -\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\langle x \rangle} \cdot \operatorname{erfc}(0) - \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} dx = \\ &= -\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\langle x \rangle} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt + \frac{2}{\pi\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = -\frac{\sqrt{2}\sigma}{\pi\langle x \rangle} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + G_1 \\ &= -\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\langle x \rangle} + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}\langle x \rangle} \end{aligned} \quad (97)$$

$$\Rightarrow G = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}\langle x \rangle} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}\langle x \rangle} \quad (98)$$

A fenti integrálokban a  $\frac{x}{\sigma} = u$  helyettesítést alkalmaztuk. Az átlagérték:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_0^\infty x Q(x) dx = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty \sigma \sqrt{2} \cdot t^{\frac{1}{2}} e^{-t} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \Gamma(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \end{aligned} \quad (99)$$

$$\Rightarrow G = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sigma} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 < \frac{1}{2} \quad (100)$$

#### d. Gini-index a további esetekre

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{2\langle x \rangle} \int_0^\infty \int_0^\infty Q(x)Q(y)|x-y| dy dx = \frac{1}{\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty Q(x)Q(y)(y-x) dy = \\
&= \frac{a^4}{(1+ab)^2\langle x \rangle} \int_0^\infty dx \int_x^\infty e^{-ax}(x+b) \cdot e^{-ay}(y+b)(y-x) dy = \\
&= \frac{a^4}{(1+ab)^2\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-ax}(x+b) dx \int_x^\infty e^{-ay}(y+b)(y-x) dy
\end{aligned} \tag{101}$$

Legyen:

$$\begin{aligned}
I &= \int_x^\infty e^{-ay}(y+b)(y-x) dy = \int_x^\infty y^2 e^{-ay} dy + \int_x^\infty y(b-x)e^{-ay} dy - \\
&- \int_x^\infty bxe^{-ay} dy = I_1 + I_2 - I_3
\end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_x^\infty y^2 e^{-ay} dy = y^2 \frac{e^{-ay}}{-a} \Big|_x^\infty + \frac{2}{a} \int_x^\infty ye^{-ay} dy = \frac{x^2}{a} e^{-ax} + \frac{2y e^{-ay}}{a} \Big|_x^\infty + \frac{2}{a^2} \int_x^\infty e^{-ay} dy = \\
&= \frac{x^2}{a} e^{-ax} + \frac{2x}{a^2} e^{-ax} + \frac{2}{a^2} \frac{e^{-ay}}{-a} \Big|_x^\infty = e^{-ax} \left( \frac{x^2}{a} + \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)
\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_x^\infty y(b-x)e^{-ay} dy = (b-x)y \frac{e^{-ay}}{-a} \Big|_x^\infty + \frac{b-x}{a} \int_x^\infty e^{-ay} dy = \frac{(b-x)x}{a} e^{-ax} + \frac{b-x}{a} \frac{e^{-ay}}{-a} \Big|_x^\infty = \\
&= e^{-ax} \left( \frac{(b-x)x}{a} + \frac{b-x}{a^2} \right)
\end{aligned} \tag{104}$$

$$I_3 = \int_x^\infty bxe^{-ay} dy = bx \frac{e^{-ay}}{-a} \Big|_x^\infty = \frac{bx}{a} e^{-ax} \tag{105}$$

Tehát:

$$I = e^{-ax} \left( \frac{x^2}{a} + \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{bx}{a} - \frac{x^2}{a} + \frac{b}{a^2} - \frac{x}{a^2} - \frac{bx}{a} \right) = e^{-ax} \left( \frac{2}{a^3} + \frac{x+b}{a^2} \right) \tag{106}$$

A kapott eredményt visszahelyettesítve a Gini-index kiszámítását szolgáló integrálba:

$$\begin{aligned}
G &= \frac{a^4}{(1+ab)^2\langle x \rangle} \int_0^\infty e^{-ax}(x+b)e^{-ax} \left( \frac{2}{a^3} + \frac{x+b}{a^2} \right) dx = \\
&= \frac{a^4}{(1+ab)^2\langle x \rangle} \left[ \int_0^\infty e^{-2ax} \frac{2(x+b)}{a^3} dx + \int_0^\infty e^{-2ax} \frac{(x+b)^2}{a^2} dx \right] = \\
&= \frac{a^4}{(1+ab)^2\langle x \rangle} \left[ \frac{2}{a^3} G_1 + \frac{1}{a^2} G_2 \right]
\end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= \int_0^\infty (x+b)e^{-2ax} dx = (b+x) \frac{e^{-2ax}}{-2a} \Big|_0^\infty + \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-2ax} dx = \\
&= \frac{b}{2a} - \frac{e^{-2ax}}{4a^2} \Big|_0^\infty = \frac{b}{2a} + \frac{1}{4a^2}
\end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
G_2 &= \int_0^\infty e^{-2ax}(x+b)^2 dx = (x+b)^2 \cdot \frac{e^{-2ax}}{-2a} \Big|_0^\infty + \frac{1}{a} \int_0^\infty (x+b)e^{-2ax} dx = \\
&= \frac{b^2}{2a} + \frac{(x+b)e^{-2ax}}{a} \Big|_0^\infty + \frac{1}{2a^2} \int_0^\infty e^{-2ax} dx = \frac{b^2}{2a} + \frac{b}{2a^2} - \frac{e^{-2ax}}{4a^3} \Big|_0^\infty = \\
&= \frac{b^2}{2a} + \frac{b}{2a^2} + \frac{1}{4a^3}
\end{aligned} \tag{109}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
G &= \frac{a^4}{(1+ab)^2 \langle x \rangle} \left[ \frac{b}{a^4} + \frac{1}{2a^5} + \frac{b^2}{2a^3} + \frac{b}{2a^4} + \frac{1}{4a^5} \right] = \\
&= \frac{a^4}{(1+ab)^2 \langle x \rangle} \left[ \frac{3}{4a^5} + \frac{3b}{2a^4} + \frac{b^2}{2a^3} \right] = \frac{a^4}{(1+ab)^2 \langle x \rangle} \cdot \frac{3+6ab+2a^2b^2}{4a^5}
\end{aligned} \tag{110}$$

Az átlagérték:

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty xQ(x) dx = \frac{a^2}{1+ab} \int_0^\infty x(x+b)e^{-ax} dx \tag{111}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x(x+b)e^{-ax} dx &= \int_0^\infty x^2 e^{-ax} dx + b \int_0^\infty x e^{-ax} dx = x^2 \frac{e^{-ax}}{-a} \Big|_0^\infty + \\
&+ \frac{2}{a} \int_0^\infty x e^{-ax} dx + b \int_0^\infty x e^{-ax} dx = \left( \frac{2}{a} + b \right) x \frac{e^{-ax}}{-a} \Big|_0^\infty + \frac{2+ab}{a^2} \int_0^\infty e^{-ax} dx = \\
&= \frac{2+ab}{a^2} \cdot \frac{e^{-ax}}{-a} \Big|_0^\infty = \frac{2+ab}{a^3}
\end{aligned} \tag{112}$$

$\Rightarrow$

$$\langle x \rangle = \frac{a^2}{1+ab} \cdot \frac{2+ab}{a^3} = \frac{2+ab}{a(1+ab)} \tag{113}$$

$$\Rightarrow G = \frac{a^4}{(1+ab)^2} \cdot \frac{3+6ab+2a^2b^2}{4a^5} \cdot \frac{a(1+ab)}{2+ab} = \frac{3+2ab(3+ab)}{4(1+ab)(2+ab)} \tag{114}$$

Az  $ab = 2$  kitételrel:

$$G = \frac{3+4 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{23}{48} \approx 0.479 \tag{115}$$

# Hivatkozások

- [1] T.S. Biró és Z. Néda. „Unidirectional random growth with resetting”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 499 (2018), 335–361. old.
- [2] S. Yitzhaki és E. Schechtman. *The Gini methodology: A primer on a statistical methodology*. Springer, New York, 2013.
- [3] T.S. Biró és Z. Néda. „Gintropy: Gini index based generalization of entropy”. *Entropy* 22.8 (2020), 879. old.
- [4] StatsDirect Statistal Analysis Software. *Gini Coefficient of Inequality*. Elérve: 2022-06-19. URL: [https://www.statsdirect.com/help/Default.htm#nonparametric\\_methods/gini.htm](https://www.statsdirect.com/help/Default.htm#nonparametric_methods/gini.htm).
- [5] I. Gere és tsai. „Wealth distribution in villages. Transition from socialism to capitalism in view of exhaustive wealth data and a master equation approach”. *Frontiers in Physics* (2022), 23. old.
- [6] I. Gere és tsai. „Wealth distribution in modern societies: Collected data and a master equation approach”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 581 (2021), 126194. old.



## DECLARAȚIE PE PROPRIE RĂSPUNDERE

Subsemnatul, BĂNICĂ-SOLYMOSI IRIZĂ, declar că Lucrarea de licență pe care o voi prezenta în cadrul examenului de finalizare a studiilor la Facultatea de FIZICĂ, din cadrul Universității Babeș-Bolyai, în sesiunea Iunie 2022, sub îndrumarea PR. NEAA ZOLTAN, reprezintă o operă personală. Menționez că nu am plagiat o altă lucrare publicată, prezentată public sau un fișier postat pe Internet. Pentru realizarea lucrării am folosit exclusiv bibliografia prezentată și nu am ascuns nici o altă sursă bibliografică sau fișier electronic pe care să le fi folosit la redactarea lucrării.

Prezenta declarație este parte a lucrării și se anexează la aceasta.

Data,  
20.06.2022.

Nume,  
BĂNICĂ-SOLYMOSI IRIZĂ  
Semnătură  
Bănică-Solymosi